

Előszó

Ne vágd el azt, amit kibogozhatsz!
(Joubert, 19. századi filozófus)

Kedves Gyerekek!

Ezt a könyvet és a hozzá tartozó feladatgyűjteményt Nektek írtuk. Szeretnénk, ha gondolkodva használnátok, és magatok fedeznétek fel a matematika újabb és újabb rejtelmeit a kitűzött feladatok megoldásán keresztül. Természetesen egy felfedezőnek is el kell sajátítania bizonyos ismereteket, ezeket így jelöltük: **TUDNI KELL!**

A tankönyvben a következő jelölésekkel fogtok még találkozni:



Most még nem tanulhatunk meg mindent, a jövőben szóba kerülő ismeretekre utal.



Amit korábban tanultatok, és már tudnotok kellene.



Így jelöltük azokat a feladatokat, amelyeket elkészíthettek, kivághattok, modellezhettek.

A matematika történetéről is olvashattok a könyvben.

Minden tananyagot egy-egy feladatsor követ. A feladatok sorszámát megkülönböztető jellel láttuk el.

1. Az új ismeretek elsajátítását, megértését igénylő alapfeladat, ezt meg kell tudnod oldani ahhoz, hogy továbbhaladhass!
2. Az új ismeret alkalmazását, tudásod rögzítését, elmélyítését segítő feladat.
3. Többféle ismeret és képesség alkalmazását igénylő feladat.



4. Fejtörők, versenyfeladatok azoknak, akik további érdekes feladatokat szeretnének megoldani.



Internettel támogatott feladatok

A tankönyvben található **Kiegészítő tananyagokat** a matematikát magasabb óraszámban tanuló csoportoknak írtuk. A hozzájuk kapcsolódó feladatokat is a fentebb leírt szintekbe soroltuk, de más színnel jelöltük, például: **25.**

A fentiekén kívül, ha egy-egy részfeladat nehezebb, gondolkodtatóbb a többinél, így jelöljük: **123.**

Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy a „pótold” típusú feladatoknál mindig a füzetetekbe dolgozzatok! A feladatok szövegéből az is kiderül, hogy melyeket ajánljuk páros vagy csoportmunkára.

A tankönyvben szereplő megoldott bevezető **példák** segítséget nyújtanak a tananyag megértéséhez, és a tankönyvi feladatok megoldásához is ötleteket adnak.

Ha szabadidőtökben is szívesen foglalkoztok matematikafeladatokkal, akkor figyelmetekbe ajánljuk: Abacus Matematikai Lapok 10–14 éveseknek (a Bolyai János Matematikai Társulat és a Matematikában Tehetséges Gyermekéért Alapítvány folyóirata)

Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny (Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány)

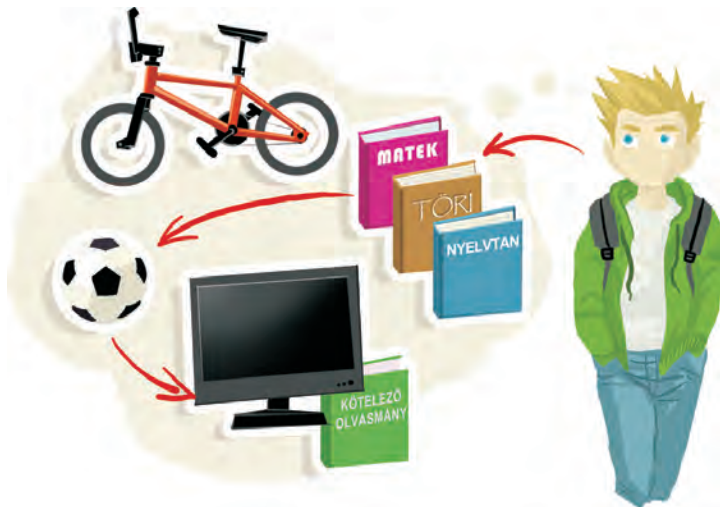
Róka Sándor: *Egypercesek – Feladatok matematikából* (Tóth Könyvkereskedés)

Imreczené–Reiman–Urbán: *Fejtörő feladatok felsősöknek* (Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft.)

Eredményes tanulást kívánunk: *a Szerzők és a Kiadó.*

Hány eset van?

1. példa



Dacos Dani hazafelé ballag az iskolából az első tanítási nap után. Azon morfondírozik, hogy mivel töltse el a nap hátralevő részét. „Először is kellene egy kicsit tanulni, de legfeljebb egy tárggyal fogok első nap foglalkozni: vagy átnézem a nyelvtani szabályokat, vagy átfutok a történelmi eseményeken, vagy egy picit matekozom. Utána bringázni vagy focizni fogok. Este esetleg olvasom a nyári kötelező olvasmányt, vagy tévét nézek.”

a) Hányféleképpen töltheti Dani a nap hátralevő részét?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy Dani először történelmet tanul, majd focizik, és végül este tévét néz?

Megoldás

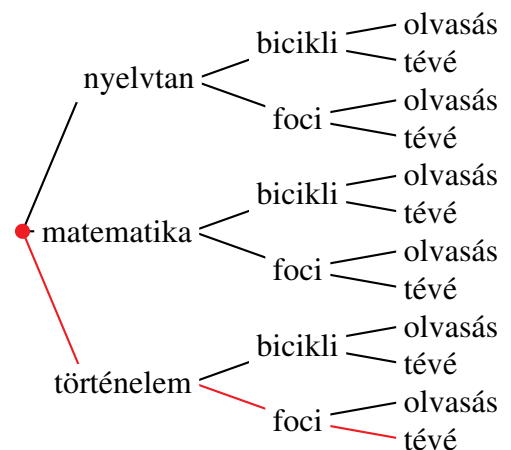
a) Lerajzoltuk a Dani gondolatmenetének megfelelő ábrát.

Például a piros vonal mentén haladva leolvashatjuk, hogy Dani történelmet tanult, majd focizott, és este tévét nézett.

Ezt az ábrát **fadiagramnak** nevezzük.

Ezen könnyen összeszámolhatjuk, hogy Dani 12-féleképpen tudja eltölteni a nap hátralevő részét.

b) Mivel Daninak 12 lehetősége van a nap hátralevő részének eltöltésére, és a felsorolt sorrend egy ezek közül, ezért annak a valószínűsége $\frac{1}{12}$.



2. példa



Gombóc Artúr elhatározta, hogy fogyókúrázni fog. Ezért csak minden második nap eszik meg egy-egy tábla csokit.

a) Első elhatározásakor úgy döntött, hogy csak hétfőn, szerdán és pénteken eszik csokit. Így vásárolt egy tábla mogyorósat, egy tábla kókuszosat és egy tábla rizseset. Hányféle sorrendben tudja elfogyasztani a csokit?

b) Artúr meggondolta magát, és úgy döntött, hogy inkább kedden, csütörtökön, szombaton és vasárnap eszik csokit. Így vett még egy tábla töltött csokit is. Hányféle sorrendben tudja elfogyasztani a 4 tábla csokit?

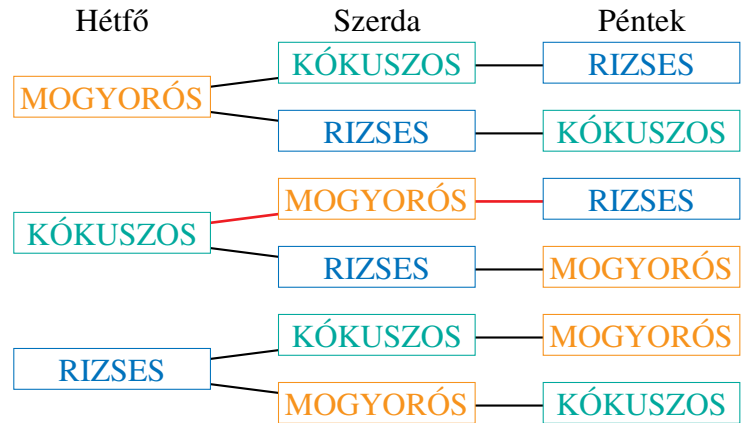
Megoldás

Most is felrajzoljuk a Gombóc Artúr gondolatmenetének megfelelő ábrát.

a) A fadiagramról leolvashatjuk, hogy Gombóc Artúr a 3-féle csokit 6-féle sorrendben eheti meg.

A fadiagram elkészítése elég munkaigényes, ezért célszerű megnézni a feladat logikai megoldását is.

Első nap a 3-féle csoki bármelyikét megeheti, míg a következő alkalommal már csak a megmaradt 2 tábla csoki közül választhat. Ez már $3 \cdot 2 = 6$ -féle lehetőséget jelent. A harmadik alkalommal megeszi a megmaradt csokit, ez már nem befolyásolja az esetek számát.



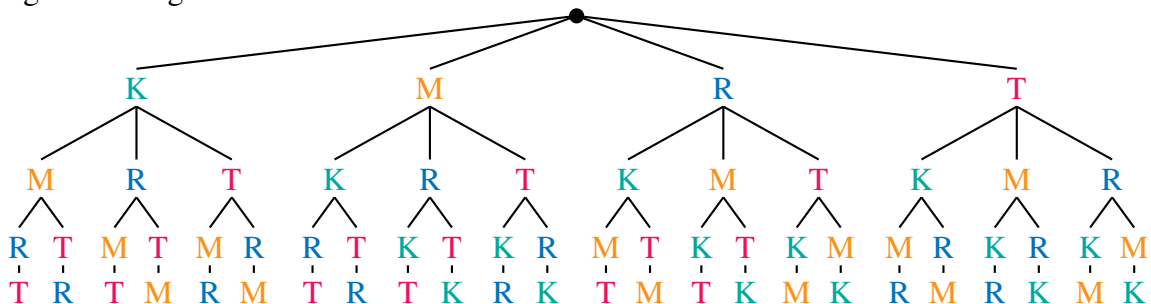
b) Nézzük például a pirossal megjelölt sort! A töltött csokit eheti:

előtte **KÓKUSZOS** közöttük **MOGYORÓS** közöttük **RIZSES** utána.

Vagyis ez az egy sorrendje a három csokinak az új csoki hozzávételével megnégyszereződött.

Természetesen ugyanígy négyszereződik meg az eddigi 6-féle sorrend is, így a 4 csoki elfogyasztásának a sorrendje: $4 \cdot 6 = 24$ (amely a $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ szorzat eredménye).

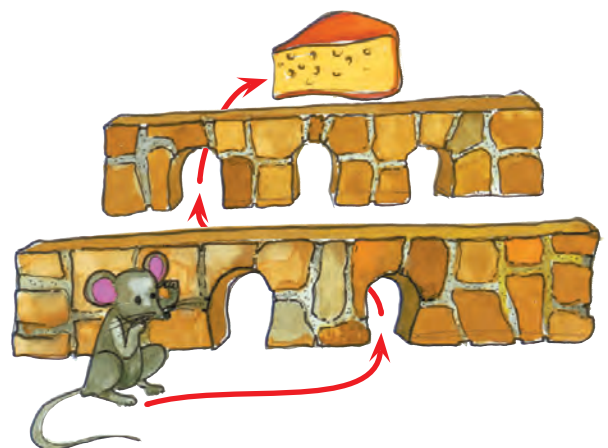
A fadiagramos megoldás:



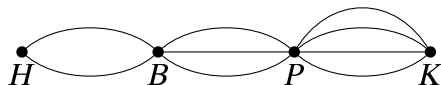
Feladatok

1. Hányféle úton tud eljutni a kisegér a sajthoz, ha két falon kell átmennie?

Az első falon 2, a másodikon pedig 3 olyan lyuk van, amelyen keresztül tud bújni. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az ábrán pirossal megjelölt úton fog haladni a kisegér, ha minden útvonalon azonos eséllyel megy a sajthoz?



2. Hencidából Boncidába 2 út vezet. Boncidából Piripócsra 3, míg Piripócsról Kukutyinba 4 út vezet.



Ha mindig kelet felé haladunk, akkor hányféleképpen juthatunk el Hencidából

a) Piripócsra Boncidán keresztül;

b) Kukutyinba Boncidán és Piripócson keresztül?

Hány eset van?

3. Az erkélyen lévő beépített virágosládák mindegyikébe egy-egy fehér, rózsaszín és piros begóniát akarunk ültetni. Hány ládát és hány palántát vásároljunk, ha mindegyik ládába más sorrendbe szeretnénk beültetni a virágokat?

4. Ági, Zsuzsi, Marcsi és Jutka moziba mennek.

a) Hányféleképpen tudnak leülni egymás melletti székekre?

b) Ha Ági és Zsuzsi mindenképpen egymás mellé szeretne ülni, akkor hányféle sorrend lehetséges?

5. Hányféle sorrendben lehet a borítékra felragasztani egymás mellé

a) egy 20 Ft-os, egy 50 Ft-os és egy 100 Ft-os,

b) egy 20 Ft-os, egy 50 Ft-os, egy 100 Ft-os és egy 110 Ft-os bélyeget?



6. „A mi családukban nincs két ember, aki egyformán inná a kávé” – meséli Joli néni. „Van, aki hidegen issza, van, aki melegen szereti; van, aki cukorral, van, aki édesítővel issza; van, aki tesz bele tejet, van, aki nem.”

Joli néni 80. születésnapjára összejött a család. Ha még valaki jött volna, akkor már nem ihatott volna mindenki másképpen elkészített kávé. Hányan ittak kávé a születésnapon?

7. A fiúknak testnevelésórán a kötelező bemelegítés után rúdra vagy kötélre kell mászniuk, majd medicinlabdázniuk vagy súlyozniuk kell, s csak ezután lehet labdajátékot választaniuk: kosár-, zsinórlabda vagy foci közül. Hány edzési lehetősége van egy-egy fiúnak a testnevelésórán?

8. a) Hány ötjegyű számot lehet kirakni az **1**, **2**, **3**, **4**, **5** számkártyákból? Hány 5-re végződő lesz a kirakott számok között? Mi a valószínűsége annak, hogy ha véletlenszerűen kirakunk egy ötjegyű számot, akkor az éppen 5-re végződő lesz?

b) Hány ötjegyű számot lehet kirakni a **0**, **1**, **2**, **3**, **4** számkártyákból?

9. Hat jóbarát biciklitúrára ment. A vita elkerülése érdekében azt találták ki, hogy minden alkalommal más-más sorrendben kerekednek. Délelőtt és délután is tekertek.

a) Megvalósíthatták-e a tervüket, ha 2 hetes volt a túra?

b) Hány napos lenne a túra, ha az összes lehetséges sorrendben bicikliznének?

10. Az iskolai matematikaversenyen 8 kitűzött feladat volt. Jóska végigolvasta azokat, s eldöntötte, hogy az utolsó példát hagyja utoljára, és a harmadik feladatot fogja először megoldani.

Hányféle sorrendben oldhatná meg a fennmaradó hat feladatot?

11. Tanulátok már ezeket az igekötőket: be, ki, le, fel, meg, el, át, rá, ide, oda, szét, össze, vissza. Illeszd ezeket hozzá a következő igékhez: fog, ír, hív, olvas, megy!

Hány szót tudsz így alkotni?

Melyik igével kapod a legtöbb olyan szót, amelyet a mindennapi életben is használunk?

Műveletek egész számokkal

Mit tudunk az egész számokról?

Egyiptomban már 4000 évvel ezelőtt – i. e. 2000-ben, és mindössze négy jellel – le tudták írni 10 000-ig a pozitív egész számokat. A 0 sokkal később jelent meg – az i. sz. I. században –, és hosszú ideig nem is tartották igazi számnak. A neve is ezt jelenti: üresség, semmi. Csak a hiányzó helyi értékek megjelölése volt a feladata.

Ha a 0 a helyén áll, az igen helyes,
sőt tiszta haszon, mit megszerezni érdemes,
mert hisz a 0 az 1-ből egyből 10-et csinál,
ha érdeme szerint szerényen a sor végére áll:
értékét meg-10-szerezi az a világ,
amely önnön 0-inak ilyképp elébe vág;
ámde minden tüstént 1/10-ére lapped,
ott, hol a 0 arcátlanul az élre kaptat:
ha 0-nk a sornak e-végére áll,
az minden értéknek 9/10 halál.

Fenti 10 sor arról szól, hogy minek hol *jó* lenni,
s ezek során tán kiderül, hogy a 0 nem épp semmi.
(Fodor Ákos)

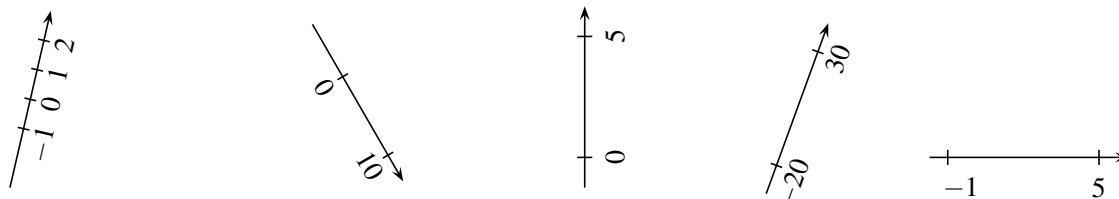
Még később nyertek állampolgárságot a számok birodalmában a negatív számok. Európában alig 600 éve használják őket. Eleinte csak az adósság és a vagyon jelölésére szolgáltak, és úgy különböztették meg őket, hogy p (plusz) és m (mínusz) jeleket írtak eléjük.

A $p12 + m23 = m11$ például a $(+12) + (-23) = (-11)$ műveletet jelentette.



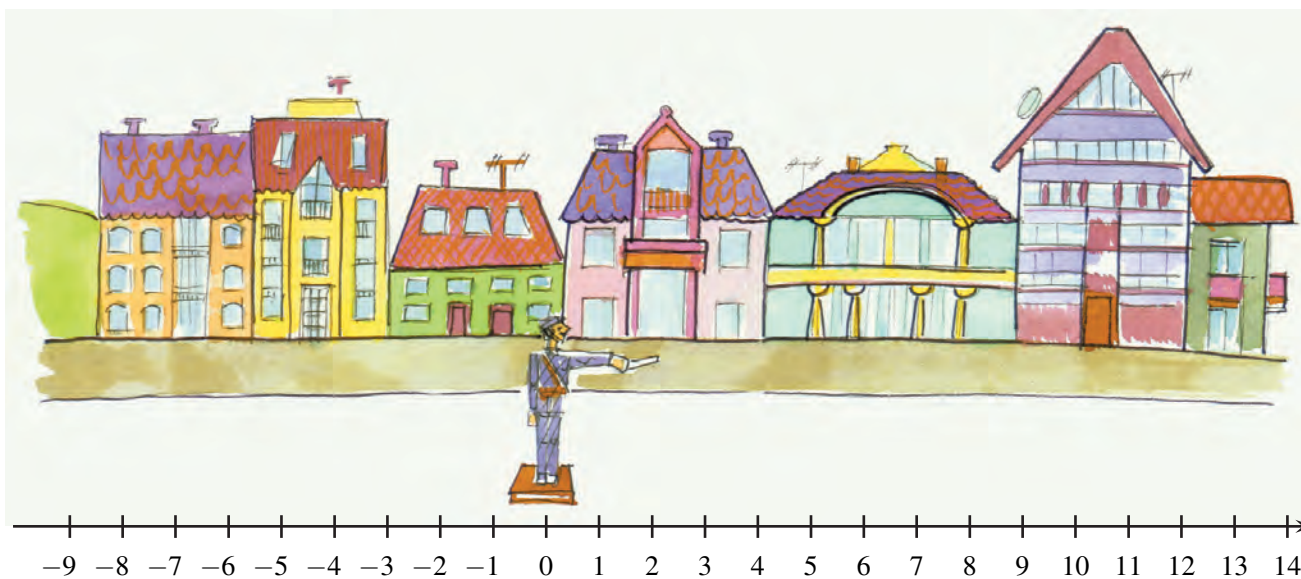
Borsos Miklós: „0” kilométerkő

A számokat számegeyenesen lehet szemléltetni:



Az egyenesek állása akármilyen lehet, és elég két tetszőleges szám helyét kijelölni rajtuk. A Descartes-féle koordináta-rendszer tengelyei egymásra merőleges számegeyenesek.

Szokás a számegeyeneset úgy is megadni, ahogy a következő oldal ábrája mutatja. A vízszintesen rajzolt számegeyenesen bármely számtól jobbra a nála nagyobb, balra pedig a nála kisebb számok állnak. A nyíl jelzi a pozitív irányt.

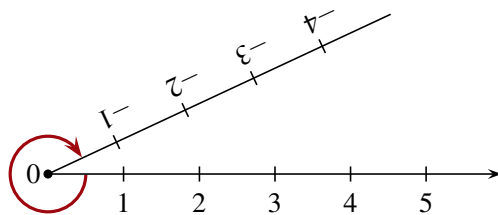


Hajtsuk össze a 0-nál a számegyenest!

A nullától egyenlő távol levő számok egymás **ellentettjei**.

Például: a 3 ellentettje (-3) , (-8) ellentettje 8.

Ezek a számok előjelükben különböznek, abszolút értékükben megegyeznek.

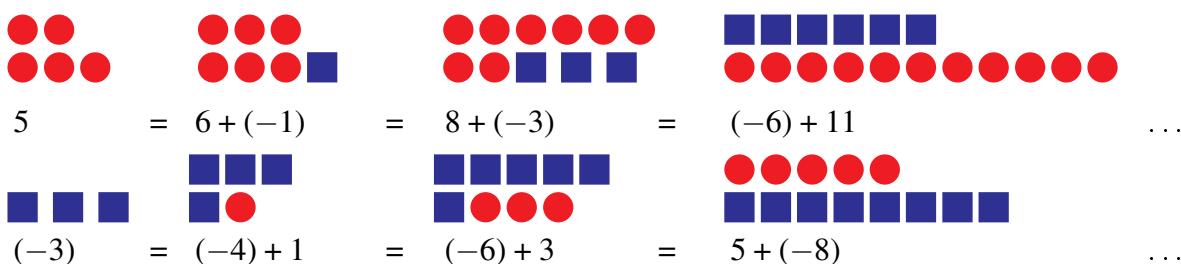


Egy szám **abszolút értéke** a 0-tól való távolsága a számegyenesen.

A 0-nak az abszolút értéke és az ellentettje is 0. Az abszolút érték mindig nemnegatív szám.

Az egész számokat szemléltethetjük adóssággal és készpénzzel. Minden számot végtelen sokféleképpen szemléltethetünk vagyoni helyzetként.

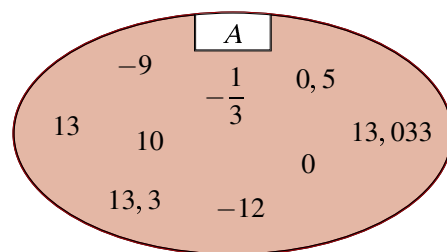
Például:



Feladatok

1. Válaszolj a kérdésekre az A halmaz elemeit vizsgálva!

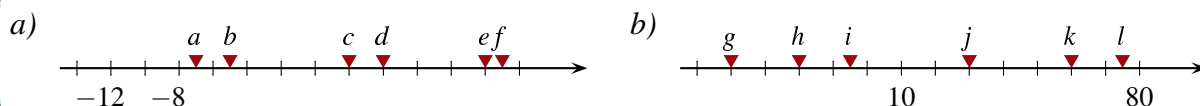
- Melyik a legnagyobb szám?
- Melyik a legnagyobb abszolút értékű szám?
- Melyik a legkisebb szám?
- Melyik a legkisebb abszolút értékű szám?
- Mennyi a legnagyobb és a legkisebb abszolút értékű szám összege?
- Mennyi a legnagyobb és a legkisebb abszolút értékű szám különbsége?



2. Az A halmaz elemeiről mondunk állításokat. Dönts el, melyik igaz, melyik nem!

- a) A legnagyobb abszolút értékű szám a legkisebb.
- b) A legnagyobb abszolút értékű szám a legnagyobb.
- c) A legkisebb abszolút értékű szám a legkisebb.
- d) A legkisebb abszolút értékű szám a legnagyobb.

3. Mely számok helyét jelöltük a számegyenesen?



4. Ábrázold számegyenesen a megadott számokat, majd állítsd azokat növekvő sorrendbe!

- a) -11 $+12$ -7 -5 0 $+3$
- b) $\frac{5}{4}$ $-\frac{3}{4}$ $\frac{7}{4}$ 1 -2 $-\frac{1}{4}$
- c) $+150$ -60 -180 $+210$ $+100$ -15 $+10$ -75

5. Írj a keretek helyére a füzetedbe olyan egész számokat, amelyek igazá teszik a nyitott mondatokat!

- a) $-\square = (-5)$ b) $-\square = (+5)$ c) $-\square = 12$
- d) $(-3) < -\square < 7$ e) $0 < -\square < 5$ f) $(-2) < -\square < 3$

6. Hol helyezkednek el a számegyenesen azok a számok, amelyek

- a) kisebbek, mint (-2) ;
- b) nem kisebbek, mint 5 ;
- c) nagyobbak, mint (-10) ;
- d) nem kisebbek, mint (-15) , és kisebbek, mint 9 ?

7. Ábrázold számegyenesen azokat a számokat, amelyek abszolút értéke

- a) nem több, mint 10 ;
- b) 4 ;
- c) 3 és 4 közé esik;
- d) (-5) ;
- e) minimum 3 és maximum 8 ;
- f) legfeljebb 6 !

8. Ábrázold számegyenesen azokat a számokat, amelyek ellentettje

- a) kisebb, mint (-2) ;
- b) legalább 5 ;
- c) nagyobb vagy egyenlő 5 -tel;
- d) legfeljebb (-6) ;
- e) (-6) és 4 közé esik;
- f) maximum (-10) !

9. A megadott számokat vagyoni helyzetként kell felírni. Minden esetben megadtuk vagy az adósság, vagy a készpénz mennyiségét. Pótold a hiányzó adatokat!

| | | | | | | |
|----------------|-------|-------|-------|------|-------|-------|
| Egész szám | -9 | 15 | -22 | 7 | -12 | -5 |
| Adósságcédula | 11 db | 13 db | | 8 db | | 99 db |
| Készpénzcédula | | | 3 db | | 22 db | |

10. Szemléltesd a következő számok mindegyikét legalább háromféleképpen vagyoni helyzetként!

- -6 3 0 -1

Egész számok összeadása és kivonása

1. példa

Mennyi $8 + (-6)$, $(-5) + 3$, $(-7) - (-4)$, $(-8) - 2$, $7 - 11$, $2 - (-5)$?

Megoldás

A megoldásokat megkaphatjuk úgy, hogy a negatív számokat adósságcédulákkal, a pozitívokat készpénzzel szemléltetjük.



$$8 + (-6) = 2$$



$$(-5) + 3 = (-2)$$



$$(-7) - (-4) = (-3)$$

A többi esetben nem tudjuk ilyen könnyen elvégezni a kivonást. Ahhoz, hogy -8 -ból el tudjunk venni 2 -t, a -8 -at olyan vagyonszerű elképzelünk, amelyik legalább 2 készpénzt tartalmaz.



$$(-8) - 2 = (-10 + 2) - 2 = (-10)$$

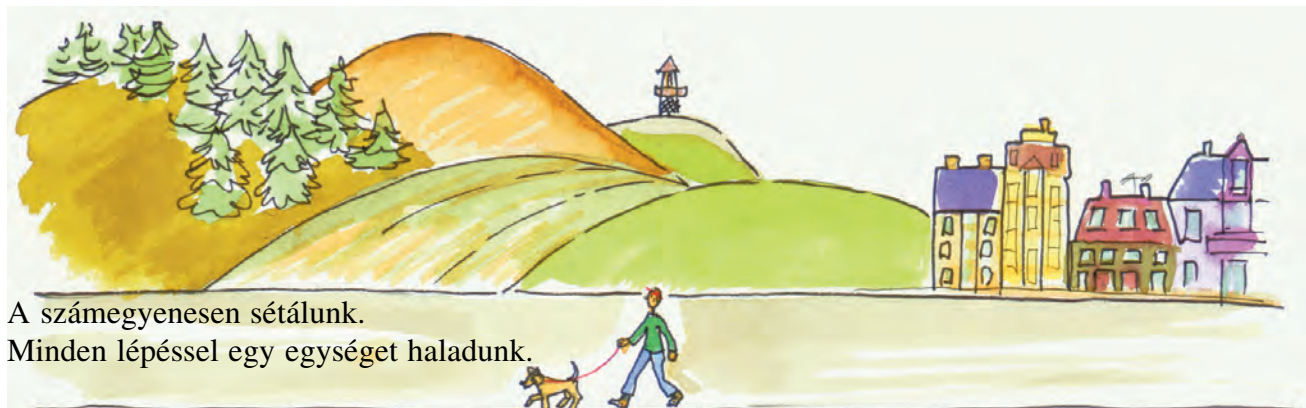


$$7 - 11 = [11 + (-4)] - 11 = (-4)$$



$$2 - (-5) = [7 + (-5)] - (-5) = 7$$

2. példa



A számegyenesen sétálunk.

Minden lépéssel egy egységet haladunk.

Válassz egy számot, tedd rá a ceruzádat! Hová jutunk, ha

- | | |
|--|--------------------------------------|
| a) balra sétálunk 5 lépést; | b) jobbra sétálunk 5 lépést; |
| c) hozzáadunk (-5) -öt; | d) elveszünk (-5) -öt; |
| e) a számunkat 5 -tel növeljük; | f) a számunkat 5 -tel csökkentjük; |
| g) hozzáadunk $(+5)$ -öt; | h) elveszünk belőle $(+5)$ -öt; |
| i) eltávolodunk a kiindulási helytől 5 -tel? | |

Megoldás

Először figyeljük meg, hogy mely esetekben növeltük és mely esetekben csökkentettük a kiinduló számot!

Az *a*), *c*), *f*) és *h*) esetekben balra léptünk 5-öt, tehát csökkent a szám, a *b*), *d*), *e*) és *g*) esetekben pedig jobbra léptünk 5-öt, tehát növekedett a számunk függetlenül attól, hogy honnan indultunk. Az *i*) esetben aszerint nő vagy csökken a kiindulási érték, hogy melyik irányba indultunk el.

Egy szám csökken, ha negatív számot adunk hozzá, vagy pozitív számot vonunk ki belőle.

Egy szám nő, ha negatív számot vonunk ki belőle, vagy pozitív számot adunk hozzá.

Most azt figyeljük meg, mely esetekben kaptuk ugyanazt az eredményt!

Ha például a (-12) -ről indulok, az *a*), *c*), *f*) és *h*) esetekben a (-17) -re jutok, a *b*), *d*), *e*) és *g*) esetekben pedig a (-7) -re.

$$(-12) + (-5) = (-12) - (+5) = (-12) - 5 = (-17)$$

$$(-12) + (+5) = (-12) - (-5) = (-12) + 5 = (-7)$$

Láthatjuk, hogy a -5 kivonása és a $+5$ hozzáadása ugyanarra az eredményre vezet. Hasonlóan a $+5$ kivonása és a -5 hozzáadása is ugyanazt az eredményt adja.

Egy szám kivonása és az ellentettjének a hozzáadása ugyanarra az eredményre vezet.

Az eddig megfigyelt tulajdonságok alapján könnyen ki lehet számítani a számok összegét és különbségét is. Mivel bármilyen szám kivonása helyettesíthető az ellentettjének hozzáadásával, elég csak az összeadásokkal foglalkoznunk.

3. példa

Mennyivel egyenlő

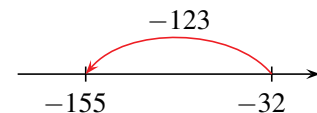
a) $-32 + (-123);$

b) $51 + (-72);$

c) $-235 + 12?$

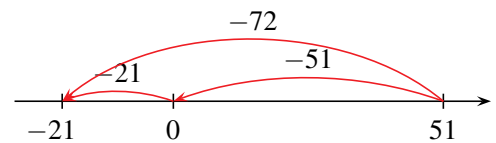
Megoldás

a) A számegyenesen a (-123) hozzáadása azt jelenti, hogy a szám 123-mal kisebb lesz, tehát a számegyenesen (-32) -től indulva 123-at balra lépünk. Ekkor a 0-tól $32 + 123 = 155$ távolságra leszünk, éppen a (-155) számnál.



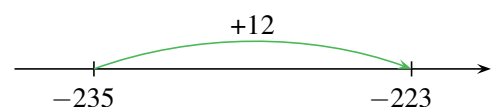
$(-32) + (-123) = -155$. Ebben az esetben az abszolút értékek összeadódnak.

b) A számegyenesen a (-72) hozzáadása azt jelenti, hogy a szám 72-vel kisebb lesz, tehát az 51-től indulva 72-t lépünk balra. Először elmegyünk 51 lépéssel a 0-ig, ezután már csak $72 - 51 = 21$ lépés marad. Így a végén 21 egységnyi távolságra leszünk a 0-tól, a -21 pontnál.



$51 + (-72) = (-21)$. Ekkor a nagyobb abszolút értékű számból kivontuk a kisebb abszolút értékű számot.

c) A számegyenesen a 12 hozzáadása azt jelenti, hogy a (-235) -től indulva 12-t jobbra lépünk, a 0-hoz 12 lépéssel közelebb kerülünk. $235 - 12 = 223$ távolságra, a (-223) számnál leszünk.



$(-235) + 12 = (-223)$. Ekkor is kivonással állapítottuk meg az eredmény abszolút értékét.

Egész számok összegének kiszámításakor két dolgot kell meghatározni:

az eredmény előjelét

az eredmény abszolút értékét

Az előjel meghatározásában segíthet, ha a számokat készpénzként, illetve adósságcédulaként képzeljük el.

| | | | |
|--|--|---|---|
| $(+2387) + (+1123)$ | $(-2387) + (-1123)$ | $(-2387) + (+1123)$ | $(+2387) + (-1123)$ |
| Itt az összeg pozitív, hiszen csupa készpénzünk van. | Itt az összeg negatív, hiszen csupa adósságcédulánk van. | Itt az összeg negatív, mivel több adósságunk van, mint készpénzünk. | Itt az összeg pozitív, mivel több pénzünk van, mint adósságunk. |

Az eredmény **abszolút értékének** kiszámítása történhet írásban is.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\begin{array}{r} 2387 \\ +1123 \\ \hline 3510 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 2387 \\ +1123 \\ \hline 3510 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 2387 \\ -1123 \\ \hline 1264 \end{array}$ | $\begin{array}{r} 2387 \\ -1123 \\ \hline 1264 \end{array}$ |
| $(+2387) + (+1123) =$ $= (+3510)$ | $(-2387) + (-1123) =$ $= (-3510)$ | $(-2387) + (+1123) =$ $= (-1264)$ | $(+2387) + (-1123) =$ $= (+1264)$ |

Ha egyező előjelű számokat adunk össze, akkor az eredmény abszolút értékét összeadással kapjuk meg. Ha különböző előjelű számokat adunk össze, akkor az eredmény abszolút értékét kivonással kapjuk meg.

Feladatok

1. Kinek van ugyanannyi vagyona?

a) Anna vagyona:



c) Cili vagyona:



e) Erika vagyona:



g) Gábor vagyona:



b) Béla vagyona:



d) Dóri vagyona:



f) Ferkó vagyona:



h) Hugó vagyona:



Közülük kitől lehet kapni 5 készpénzcédulát? Mennyi vagyona marad, ha elkérünk tőle 5 készpénzcédulát?

2. Írd le a matematika nyelvén a szövegeket, és számold ki, kinek mennyi vagyona lesz!

a) Anna vagyona (+12), és kap (+8)-at.

b) Erika vagyona (+5), és költ 8 készpénzt.

c) Böbe vagyona (-2), és kap (+21)-et.

d) Fanni vagyona (-3), és költ (+11) készpénzt.

e) Csaba vagyona (-8), és szerez 11 adósságcédulát.



Nézz utána, mit jelentenek, honnan erednek *vagyon* és *pénz* szavaink! Miért a *kész* szóval kezdődik a készpénz szavunk?

3. Mi történhetett? Írj róla műveletet!

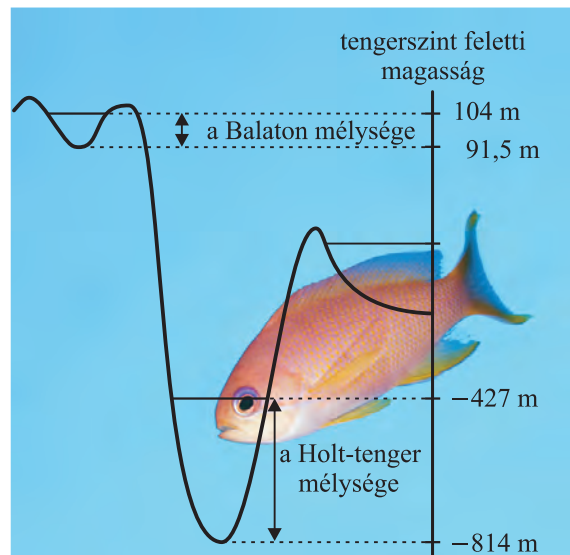
- a) Ancsának ennyi vagyona volt: ● ● ●, és ennyi lett: ■ ■.
- b) Béci vagyona ennyi volt: ● ● ● ● ● ●, és ennyi lett: ■ ■ ■ ■ ■ ■.
- c) Csongor vagyona ennyi volt: ■ ■ ■ ■ ■, és ennyi lett: ■.
- d) Dini vagyona ennyi volt: ■ ■ ■ ■ ■ ■, és ennyi lett: ● ●.
- e) Editke vagyona ennyi volt: ■, és ennyi lett: ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●.

4. Végezd el a változtatásokat összeadással és kivonással is!

- a) Növekd a (-8) -at 3-mal! b) Növekd a $(+6)$ -ot 7-tel!
- c) Csökkentsd a (-12) -t 6-tal! d) Csökkentsd a $(+9)$ -et 9-cel!

5. Megadjuk a Föld néhány nagy tavának és tengerének mélységét. Ezt a mélységet természetesen a tó felszínétől számítják. Megadjuk a tavak felszínének tengerszint feletti magasságát is. Számítsd ki minden tó aljának a tengerszint feletti magasságát! Az adatok alapján válaszolj a kérdésekre!

| Tó neve | Tengerszint feletti magassága | Maximális mélysége |
|---------------|-------------------------------|--------------------|
| Bajkál-tó | 455 m | 1642 m |
| Balaton | 104 m | 12,5 m |
| Kaszpi-tenger | -28 m | 1025 m |
| Csorba-tó | 1346 m | 20 m |
| Michigan-tó | 176 m | 281 m |
| Aral-tó | 29 m | 37 m |
| Holt-tenger | -427 m | 387 m |
| Ontario-tó | 75 m | 244 m |



Melyik van magasabban? Mennyivel?

- a) A Balaton felszíne vagy a Bajkál-tó alja?
- b) Az Aral-tó fenéke vagy a Michigan-tó alja?
- c) A Kaszpi-tenger fenéke vagy a Holt-tenger felszíne?
- d) A Ontario-tó legalja vagy a Csorba-tó felszíne?

@ Nézz utána, hogyan nevezik a Csendes-óceán legmélyebb pontját! Találsz-e ennél mélyebb helyet a többi óceánnál?

6. a) Készíts összeadásokat úgy, hogy az egyik összeadandót a $\{-183; -15; +762\}$ halmazból, a másikat pedig a $\{-17; +13; -120; +85\}$ halmazból választod!

b) Hány eset lehetséges? Végezd el az összes lehetséges összeadást!

7. Az $a - b$ különbségben az a értékét a $\{-42; +27; -13\}$, a b értékét pedig a $\{-37; -48; +13; -42\}$ halmazból választjuk. Végezd el a kivonást az összes lehetséges módon!

8. Válassz egy számot a számegyenesen! A feladatok mindegyikében erről a számról indulj!

- a) Vonj le belőle (-10) -et! b) Vonj ki belőle (-9) -et! c) Lépj jobbra 9-et!
 d) Lépj balra 18-at! e) Csökkentsd 9-cel! f) Növeld 18-cal!
 g) Vonj ki belőle (-18) -at! h) Adj hozzá 9-et! i) Növeld 10-zel!
 j) Csökkentsd 6-tal! k) Vonj ki belőle 6-ot! l) Végy el belőle 6-ot!

Csoportosítsd az utasítások betűjeleit aszerint, hogy a kiinduló értéknél nagyobb vagy kisebb számhoz jutottál!

Válaszd ki az azonos jelentésű utasításokat!

9. Egy sorozat első eleme legyen 10, a második elem legyen 5-tel több, a harmadik elem legyen 4-gyel több, mint az előző! Mindig eggyel kisebb legyen a különbség, mint a korábbi két elem különbsége volt!

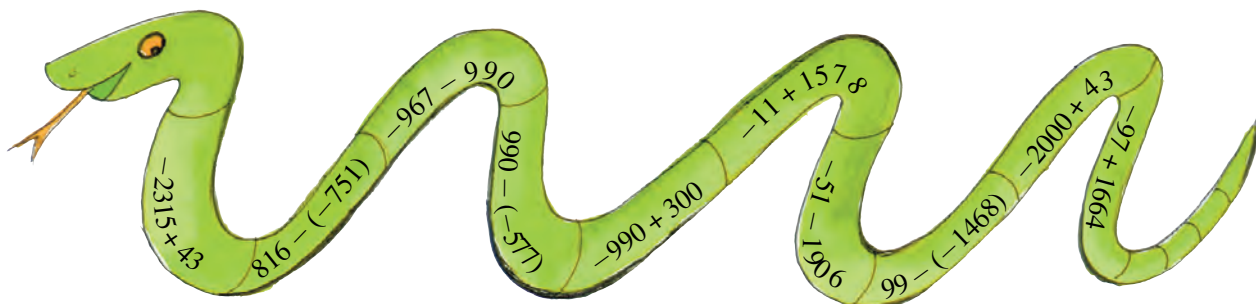
- a) Mennyi lesz az 5. elem? b) Mennyi lesz a 8. elem? c) Mennyi lesz a 20. elem?
 d) Folytasd a sorozatot az első elemtől visszafelé 5 elemmel!

10. A következő műveletek mindegyikében az egyik szám abszolút értéke 663, a másiké 521. Minden lehetséges módon előjeleket adtunk nekik, majd összeadásokat és kivonásokat készítettünk belőlük. Számold ki őket! Gondold meg a számolások elvégzése előtt, hogy hányféle eredményt kapsz, és hogy melyik feladatok vezetnek azonos eredményre!

- a) $(+663) + (-521)$ b) $(-521) - 663$ c) $(-663) - (-521)$
 d) $(+663) - 521$ e) $521 - 663$ f) $(-521) - (-663)$
 g) $(-663) + 521$ h) $521 - (-663)$ i) $663 - (-521)$
 j) $(-521) + 663$ k) $(-663) + (-521)$ l) $663 + 521$
 m) $521 + (-663)$ n) $(-521) + (-663)$ o) $(-663) - 521$

11. Mi az elrejtett szó? Írd le a füzetedbe a kígyó hátán álló műveletek eredményeinek megfelelően az azokkal egyenlő értékű betűket!

B = $-738 - 1219$ K = $-1523 + (-749)$ A = $956 - (-611)$ L = $-641 + (-49)$



Ezekből a betűkből más szavakat is ki lehet rakni. Készíts egy másik rejtvényt! Nem baj, ha ennél a kígyónál rövidebb lesz.

12. Mi lehet a sorozat szabálya? Folytasd a sorozatod 3-3 elemmel mindkét irányban az általad kitalált szabály szerint!

- a) $\dots, 40, 30, 21, 13, 6, \dots$ b) $\dots, 5, 4, 6, 3, \dots$ c) $\dots, 66, 67, 68, 55, 56, 57, 44, \dots$
 d) Keress szabályt, amellyel akárhanyadik elemet ki tudod számítani!

13. Írd le műveletekkel!

- a) (-5) és $(+3)$ különbségéhez add hozzá az összegüket!
 b) (-7) abszolút értékéhez add hozzá a (-8) és a (-3) különbségét!
 c) (-10) és $(+10)$ különbségéhez adj hozzá (-3) -at!
 d) (-5) -höz add hozzá a $(+3)$ ellentettjét!
 e) (-5) -ből vedd el az ellentettjét!
 f) (-5) -höz add hozzá az ellentettjét!

14. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

a) $17 - (-2) = 17 + \square$ b) $(-32) - 7 = (-32) + \square$ c) $32 + 8 = 32 - \square$

15. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

a) $x - 7 = (-12)$ b) $x - 12 = 7$ c) $5 - x = (-13)$

16. Tedd igazzá a nyitott mondatokat!

a) $x - (-5) = 0$ b) $x + (-21) = (-3)$ c) $3 + (-x) = 10$

17. Kinek az állítása igaz, kié hamis a gyerekek közül?

Dávid: Ha egy számhoz hozzáadok valamit, akkor nagyobb számhoz jutok.

Gyöngyvér: Lehet egy számhoz hozzáadni valamit úgy, hogy kisebb számhoz jussunk.

Ági: Pozitív szám hozzáadása a számot növeli.

Juli: Negatív szám hozzáadásával is növelhetjük a számot.

Pali: Pozitív szám hozzáadásával és negatív szám kivonásával is növelhetünk egy számot.

Robi: Kivonás helyett mindig végezhetünk összeadást.

18. Készíts számpéldát az állításokhoz, állapítsd meg, hogy a választott példára teljesül, vagy pedig nem teljesül az állítás! Ennek alapján próbáld meg eldönteni, hogy melyik állítás igaz, és melyik nem igaz! Például így:

Állítás: Pozitív szám kivonása az ugyanolyan abszolút értékű negatív szám hozzáadásával helyettesíthető.

Példa: $10 - (+5) = 10 + (-5)$, ez teljesül.

Az állítás mindig igaz, hiszen egy szám kivonása megegyezik az ellentettjének a hozzáadásával.

- a) Pozitív szám kivonása az ugyanolyan abszolút értékű negatív szám hozzáadásával helyettesíthető.
 b) Negatív szám hozzáadása az ugyanolyan abszolút értékű pozitív szám kivonásával helyettesíthető.
 c) Pozitív szám kivonása az ugyanolyan abszolút értékű negatív szám kivonásával helyettesíthető.
 d) Pozitív szám kivonása az ellentettjének a kivonásával helyettesíthető.
 e) Negatív szám kivonása az ellentettjének a hozzáadásával helyettesíthető.



19. Találd meg az elrejtett szót! Mennyit adjunk hozzá

M: (-90)-hez, hogy (+230)-at kapjunk;

S: (-90)-hez, hogy (-230)-at kapjunk;

R: 124-hez, hogy (-400)-at kapjunk;

Z: 124-hez, hogy 400-at kapjunk;

K: 5117-hez, hogy (+60)-at kapjunk;

A: 5117-hez, hogy (-60)-at kapjunk;

U: (-5117)-hez, hogy (+60)-at kapjunk;

P: (-5117)-hez, hogy (-60)-at kapjunk?

Írd a betűket a füzetedbe az alább megadott eredményeknek megfelelő sorrendben! Mi lett az elrejtett szó? -5057 -524 -5177 +320 +5057 +5177 -140 +276

20. Helyezd el az 5, 9, 0, 2, 3 számkártyákat és a körökbe az előjeleket úgy, hogy a megadott végeredményeket kapd!

a) $\bigcirc \square \square \square - \bigcirc \square \square = 613$

b) $\bigcirc \square \square + \bigcirc \square \square \square = (-882)$

c) $\bigcirc \square \square - \bigcirc \square \square \square = (-922)$

d) $\bigcirc \square \square + \bigcirc \square + \bigcirc \square \square = 27$

Készíts te is rejtvényeket az osztálytársaidnak!

Több tag összege, különbsége

Példa



Összeadás esetén a tagok sorrendje felcserélhető akkor is, ha előjeles számokat adunk össze.



$$(+3) + (+5) + (-3) = (-3) + (+5) + (+3) = (+3) + (-3) + (+5) = 0 + 5 = 5$$

Nézzük meg, hogy a tagok sorrendje felcserélhető-e akkor is, ha az összeadások mellett kivonások is szerepelnek!

Megoldás

Piros-kék korongok egyik oldalára írjunk tetszőlegesen + és - előjelű számokat!

Így:



Fordítsuk meg ezután a korongokat, és a másik oldalukra írjuk rá a szám ellentettjét! Tehát a példánkban a kék (+5)-ös korong másik oldalára (-5) kerül.



Markoljuk fel ezután a korongkészletet, rázzuk meg a korongokat, majd dobjuk le, és rendezzük el a korongokat véletlenszerű sorrendben! Készítsünk hozzájuk műveletsort úgy, hogy minden **piros korong elé az összeadás jelét**, minden **kék korong elé a kivonás jelét** írjuk! Például a fenti korongkészlet ilyen műveletsorokat jelenthet:

$$0 + \text{red } -23 - \text{blue } +5 + \text{red } +8 - \text{blue } -15 - \text{blue } +7 + \text{red } -1 \text{ vagy } 0 - \text{blue } -8 + \text{red } -23 + \text{red } -5 - \text{blue } +1 + \text{red } +15 + \text{red } -7$$

(Mivel csak összeadások és kivonások vannak a műveletsorainkban, mindig indíthatjuk őket 0-val.)

Ugyanezeket a korongokat bárhogyan ledobva és összekeverve más műveletsorhoz, de ugyanahhoz az eredményhez jutunk. Ez azért van így, mert a **blue +5** korong vagy így esett le: **blue +5**, ekkor a

(+5) kivonását jelenti, vagy így: **red -5**, ekkor a (-5) hozzáadását jelenti, és azt már tudjuk, hogy egy szám kivonása mindig helyettesíthető ellentettjének hozzáadásával.

Ebben a modellben a **műveleti jelet a korong színe jelenti**. Mivel tetszőlegesen keverhetjük és forgathatjuk a korongokat, megtehetjük, hogy mindegyik korongot úgy fordítjuk, hogy

1. negatív szám legyen felül:

$$0 + \text{(-23)} + \text{(-5)} - \text{(-8)} - \text{(-15)} + \text{(-7)}$$

2. pozitív szám legyen felül:

$$0 - \text{(+23)} - \text{(+5)} + \text{(+8)} + \text{(+15)} - \text{(+7)}$$

3. a kék oldal legyen felül, azaz csak kivonást végzünk:

$$0 - \text{(+23)} - \text{(+5)} - \text{(-8)} - \text{(-15)} - \text{(+7)}$$

4. a piros oldal legyen felül, azaz csak összeadást végzünk:

$$0 + \text{(-23)} + \text{(-5)} + \text{(+8)} + \text{(+15)} + \text{(-7)}$$

Azokat a műveletsorokat, amelyekben csak pozitív és negatív számok összeadása és kivonása szerepel, sokféleképpen átalakíthatjuk azért, hogy a műveletsort könnyebb legyen elvégezni.

Feladatok

1. a) Írj két különböző számot, amelyek összege 0!

b) Írj három különböző számot, amelyek összege 0!

c) Írj két különböző számot, amelyek különbsége 0!

2. Írj egy pozitív és egy negatív számot úgy, hogy az összegük

a) pozitív legyen;

b) 0 legyen;

c) negatív legyen!

3. Három számot összeadtunk, és az összeg a tagok mindegyikénél kisebb lett. Hogyan lehetséges ez? Írj rá példákat!



4. (-27) (+12) (-30) Írj a korongokról műveletsort úgy, ahogyan azt a fejezet bevezető példájában leírtuk! Számítsd ki az eredményét!

Forgasd úgy a korongokat, hogy

a) egy negatív szám legyen felül;

b) csak kék legyen felül;

c) csak piros legyen felül;

d) csak pozitív szám legyen felül!

5. Készíts korongokat a műveletsornak megfelelően!

a) $(+73) - (+141) + (-129) - (-27) - (-41)$ b) $(-379) + (-17) - (-270) - (-97) + (-21)$



6. **Játék** – A játékot párban játsszátok! Vegyetek elő 6-6 piros-kék korongot! Egyikőtök tegye le tetszőleges sorba a 6 korongot, például így: kék-kék-piros-kék-piros-piros. Majd írjon rá mindegyik korongra egy-egy pozitív vagy negatív számot! A társa másolja le pontosan ezt a készletet! Ekkor mindkettőtök előtt ugyanaz a korongsor áll. Fordítsátok meg ezután a korongokat, és a másik oldalukra írjátok rá a szám ellentettjét! Tehát például a kék +5-ös korong másik oldalára -5 kerül.

Mindketten markoljátok fel a korongjaitokat, rázzátok meg a korongokat, majd dobjátok le, és rendezzétek el véletlenszerű sorrendben! Ezután írjátok róla műveletsort úgy, hogy minden piros korong elé az összeadás jelét, minden kék korong elé a kivonás jelét írjátok!

Mivel csak összeadások és kivonások vannak a műveletsoraitokban, mindig indíthatjátok azokat 0-val. Számoljátok ki a kapott műveletsor eredményét, és hasonlítsátok össze padoszomszédotok eredményeivel!

Ismételjétek meg többször is a játékot! Mit vesztek észre?

7. Végezd el a műveleteket! A feladatokban csak összeadások és kivonások szerepelnek, ezért a műveletvégzés sorrendje tetszőleges, de ne feledd, hogy a számokat csak az előttük álló műveleti jellel együtt szabad cserélgetni!

a) $(-41) - (-55) + 51 - (-5)$

b) $18 - 23 + (-17) - (-2)$

c) $(-26) + 32 - 4 - (-18)$

d) $33 - 128 + 8 - (-13)$

e) $7200 - 12 - 399 - (-800) - 1$

f) $56 + (-479) - (-15) + (-95) + 24$

g) $(-1) + 31 - 28 + (-49) + 69 + (-22)$

h) $176 - 53 - 16 + 14 - (-53) + 72$

8. A hőmérséklet megváltozásakor a hőmérséklet-különbséget úgy számoljuk ki, hogy a változás után kapott értékből kivonjuk a kezdeti értéket.

Ha például hétfőn reggel (-1) fok volt, és kedd reggelre $(+7)$ fok lett, akkor a hőmérséklet-különbség $(+7) - (-1) = (+8)$ fok.

Ha ezután szerda reggel -3 fokot mérnek, akkor a hőmérséklet-különbség $(-3) - (+7) = (-10)$ fok. Így a hőmérséklet-különbségre kapott érték abszolút értéke megmutatja, hogy mennyivel változott a hőmérséklet, az előjele pedig elárulja, hogy melegeedett vagy hűlt az idő.

| | Hétfő | Kedd | Szerda | Csütörtök | Péntek | Szombat | Vasárnap |
|---------------------|-------|------|--------|-----------|--------|---------|----------|
| Reggeli hőmérséklet | -1 | +7 | -3 | -3 | 0 | -5 | -12 |
| Déli hőmérséklet | +4 | +8 | 0 | -1 | +6 | -9 | -11 |
| Esti hőmérséklet | +8 | +4 | -1 | -2 | -1 | -10 | -9 |

- Készíts hőmérséklet-grafikont az adatok alapján!
- Mennyi a hőmérséklet-különbség hétfő reggel és vasárnap este között?
- Reggeltől délig általában emelkedett a hőmérséklet. Volt-e olyan nap, amikor csökkent?
- Déltől estig általában csökkent a hőmérséklet. Volt-e olyan nap, amikor emelkedett?
- Melyik időszakban volt a változás abszolút értéke a legnagyobb? Mennyi ez az érték?
- Melyik időszakban volt a változás abszolút értéke a legkisebb? Mennyi ez az érték?
- Melyik időszakban volt a hőmérséklet-különbség a legnagyobb? Mennyi ez az érték?
- Melyik időszakban volt a hőmérséklet-különbség a legkisebb? Mennyi ez az érték?

9. A következő feladatok megoldása során Panni az **1**-gyel, illetve a **2**-vel jelölt írásbeli összeadást, illetve kivonást végezte el. Találd ki, melyik feladathoz melyik művelet tartozik!

a) Mennyivel több a 730 a 174-nél?

b) Mennyi (-730) és (-174) összege?

c) Mennyi (-730) és 174 különbsége?

d) Mennyi (-730) és 174 összege?

e) Mennyi (-730) és (-174) különbsége?

f) Mennyivel több a 730 a (-174) -nél?

g) Mennyi 730 és (-174) távolsága a számegyenesen?

h) Melyik az a szám, amely éppen 174-gyel kevesebb (-730) -nál?

i) Mennyi 174 és (-730) távolsága a számegyenesen?

j) Mennyi (-174) és (-730) távolsága a számegyenesen?

$$\begin{array}{r} 730 \\ + 174 \\ \hline \end{array}$$

1

$$\begin{array}{r} 730 \\ - 174 \\ \hline \end{array}$$

2