ELŐSZÓ – A TANKÖNYV TÉMAKÖREI

Sok szeretettel köszöntünk az új tanévben!

Ahogy évről évre előrébb lépünk a tanulásban, egyre szélesebb területet ölel fel a matematika, és emellett egyre mélyebb, érdekesebb összefüggésekre derül fény. Ez adja a matematika szépségét és játékosságát. Szeretnénk, ha sok örömöd lenne ezek felfedezésében. De emellett a matematika, a matematikai modellek használata és a matematikai gondolkodás az élet számos területén előfordul. Ez a tankönyv – hasonlóan, mint a tavalyi – szeretne felvillantani sok-sok kapcsolódási pontot és gyakorlati alkalmazást.

Az egyes leckékben a következő típusú részekkel találkozhatsz:

BEVEZETŐ: Sok esetben egyszerű és gyakorlati problémák vezetnek érdekes matematikai kérdésekhez. Ilyenekre találhatsz példát a lecke elején a BEVEZETŐ-ben.

KIDOLGOZOTT FELADAT: Ebben a részben részletes magyarázatokkal mutatjuk be egy konkrét feladat megoldását.

ELMÉLET: Itt rendszerezzük a matematikai tartalmakat. Megfogalmazzuk a pontos matematikai fogalmakat (definíciók) és állításokat (tételek) is.

FELADATOK: Igyekeztünk változatos feladatokat összeállítani egy-egy órára, a könnyebbekkel kezdve. A feladatokat nehézségük szerint szinteztük. A Ⓚ jel arra utal, hogy a feladat megoldásához nemcsak matematikai tudás szükséges, hanem többféle szempontú elemzés és probléma megoldás. Ezek az úgynevezett kompetencia feladatok.

CSOPORTMUNKA: Néhány esetben ezt a munkaformát javasoljuk a feladatok megoldására.

HÁZI FELADAT: 4-5 feladat az otthoni munkához.

RÁADÁS: Itt matematikai érdekességeket, ötletes és izgalmas feladatokat találsz.

EMELT SZINT: Ezek a részek túlmutatnak a középszintű érettségi követelményeken. Az emelt szintű érettségi követelményeihez tartozó fogalmak, feladattípusok, illetve szép, precíz bizonyítások találhatók ezekben a részekben.

Ha tartós tankönyved van, amit vissza kell adnod az iskolának a tanév végén, akkor ne írj a tankönyvbe, dolgozz a füzetedbe! (Táblázatok esetén segítségedre lehet egy öntapadós jegyzettömb: egy öntapadós lapot tegyél a táblázat mellé, s arra írhatod az eredményeket.)

1. Logika

– IGAZ VAGY HAMIS?

Minden kék oroszlán növényevő. Igaz-e az állítás? Mi a tagadása?

– A KÖTŐSZAVAKON SOK MÚLIK.

Mézet vagy tejet? – Mindkettőt. – válaszolta Micimackó.

2. Középértékek és a négyzetgyök

– EGY FONTOS EGYENLŐTLENSÉG

Ugyanannyival nő / ugyanannyiszorosára nő ismét a fizetés – hogyan járunk jobban?

– A GYÖKVONÁS AZONOSSÁGAI

A gyökjel alatt, a gyökjel előtt; két gyökjelből egyet…

3. Geometriai mérések, számítások

– EGYBEVÁGÓ HÁROMSZÖGEK

A részletek megegyeznek. Az egész is ugyanaz?

– KÉT ÚJ TÉTEL A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGRŐL

Mértani közép a derékszögű háromszögben

4. Másodfokú függvények

– ELTOLJUK A GRAFIKONT

Fel-le, jobbra-balra. Változik a hozzárendelés. Hogyan mozdul a grafikon?

– A MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY GRAFIKONJA

Parabolák minden mennyiségben

5. Másodfokú egyenletek

– LEHET TÖBB MEGOLDÁS!

Segít a megoldó képlet.

– SZÖVEGES FELADATOK

Kertekről, utazásról, vásárlásról, pénzügyekről…

BEVEZETŐ ÓRA

KIDOLGOZOTT FELADAT

Bence, Tamás és Péter szállodát terveznek. A szálloda 3 emeletes lesz, és egy tó partján fog állni.
Azt számolják, mennyi lehet a legnagyobb napi bevétel. A földszinten lesznek a közösségi helyiségek, egy-egy emeleten pedig 20 kétágyas erkélyes szoba. A tóra néz emeletenként 5 szoba, ezek az első osztályúak, oldalról a tóra néz mindkét oldalon szintén 5-5 szoba, ezek a másodosztályúak. A hátsó front az út felé fordul, itt vannak a harmadosztályú szobák. A másodosztályúak ára 80%-a az első osztályú szobák árának, a harmadosztályúak ára 80%-a a másodosztályú szobák árának.
Foglaljuk táblázatba, mennyi a napi bevétel, ha tele a szálloda?

Megoldás
Telt ház esetén így alakulna a napi bevétel:

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.	15	A	15A
II.	30	0,8A	$30 \cdot 0{,}8A = 24A$
III.	15	$0{,}8 \cdot (0{,}8A) = 0{,}64A$	$15 \cdot 0{,}64A = 9{,}6A$

Tehát a legnagyobb (maximális) napi bevétel:
$15A + 24A + 9{,}6A = 48{,}6A$ forint lenne.

FELADAT

1 – Mivel a szállodában nincs lift, a harmadik emeleti szobákat olcsóbban kellene kiadni. – töpreng Péter. – Legyenek a harmadik emeleti szobák 20%-kal olcsóbbak, mint az alattuk lévők. Ekkor viszont a harmadik emeleti hátsó szobák már negyedosztályúak lennének.
Számold ki, mennyi lenne ezzel az új feltétellel a maximális napi bevétel! Töltsd ki a táblázatot!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0{,}8 \cdot (0{,}8A) = 0{,}64A$	
IV.			

A legnagyobb (maximális) napi bevétel az I–IV. osztályú szobák bevételének összege.

2 Tamás szerint az új feltétellel a harmadik emeleti szobákból szerezhető bevétel éppen 80%-a a második emeleti szobák együttes árának. Így a táblázatos módszernél sokkal egyszerűbben meg lehet kapni az előző feladat eredményét.

a) Igaz-e Tamás állítása?

b) Oldd meg Tamás ötletével és a kidolgozott feladat eredményével az előző feladatot!

3 Péter ezt írta fel az 1. feladathoz:
$(48{,}6 : 3) \cdot 2{,}8 = 45{,}36$.
Vajon mire gondolt?

4 Bencének eszébe jutott, hogy nem kellene ragaszkodni a négyzet alakú alapterülethez. Hátha több bevételt lehetne elérni úgy, hogy növelnék az első osztályú szobák számát (de emeletenként továbbra is 20 szoba lenne). Hogyan változna a bevétel, ha

a) emeletenként 6 szoba nézne a tóra is és az út felé is, a többi pedig oldalról nézne a tóra;

b) emeletenként 7 szoba nézne a tóra is és az út felé is, a többi pedig oldalról nézne a tóra?

Készítsd el a füzetedben az a) és a b) változathoz tartozó táblázatot, és töltsd ki őket! Számold ki mindkét esetben a teljes bevételt is!

a)

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0{,}8 \cdot (0{,}8A) = 0{,}64A$	
IV.		$0{,}8 \cdot (0{,}64A)$	
A teljes bevétel:			

b)

Hányad osztályú?	Hány darab van a 3 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0{,}8 \cdot (0{,}8A) = 0{,}64A$	
IV.		$0{,}8 \cdot (0{,}64A)$	
A teljes bevétel:			

5 – Ha lenne lift – szól közbe Bence –, akkor esetleg 4 emeleten is el lehetne helyezni a 60 szobát, és így spórolnánk az alapozásnál! Ekkor nem kellene olcsóbban adni az emeleti szobákat, csak az számít, hogy egy szoba a tóra néz, oldalra vagy hátrafelé. Hogyan helyeznéd el 4 emeleten a 60 szobát? Válassz egy konkrét elrendezést, és számold ki ebben az esetben a legnagyobb napi bevételt!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0{,}8 \cdot (0{,}8A) = 0{,}64A$	
A teljes bevétel:			

HÁZI FELADAT

1 **a)** Bence a 4 emeletes, 60 szobás, liftes szállodát négyzet alapúnak tervezné, az alsó három emeletén 16–16 szobát helyezne el. A 4. emeleten mindegyik szoba a tóra vagy legalábbis oldalról a tóra nézne. Mennyi lenne így a maximális napi bevétel?

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0{,}8 \cdot (0{,}8A) = 0{,}64A$	
A teljes bevétel:			

b) Péter nem tervezne oldalról a tóra néző szobákat, és nem ragaszkodik ahhoz sem, hogy négyzet alapú legyen az épület. Mekkora bevétel érhető el így? Két esetben töltsd ki a táblázatot, és számold ki a legnagyobb napi bevételt!

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0{,}8 \cdot (0{,}8A) = 0{,}64A$	
A teljes bevétel:			

Hányad osztályú?	Hány darab van a 4 emeleten?	Egységár (Ft)	Összes bevétel (Ft)
I.		A	
II.		0,8A	
III.		$0{,}8 \cdot (0{,}8A) = 0{,}64A$	
A teljes bevétel:			

2 Készíts tervet egy olyan 3 emeletes szállodához, ahol mindegyik oldalon emeletenként legalább két szoba van, és számold ki, telt ház esetén maximális a bevétel!

1 IGAZ VAGY HAMIS

FELADAT

1 Egy gimnázium női kosárlabda-bajnokságán 8 csapat indult. A következő hírek terjedtek el a 11. B csapatáról:

A: Második lett.

B: Nem a második helyen végzett.

C: Nem jutott a legjobb három közé.

D: Dobogós helyen végzett.

E: Utolsó lett.

F: Győzött.

a) Készítsd el a füzetedbe az alábbi táblázatot! A táblázat felső sorába beírtuk, hogy a 11. B osztály csapata hányadik helyezést ért el a kosárlabda-bajnokságon. Írd be a táblázatba, hogy az egyes esetekben melyik hír igaz és melyik hamis! Segítségül néhány mezőt előre kitöltöttünk.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
A	hamis	igaz	hamis					
B	igaz	hamis						
C								
D								
E								
F								

b) A füzetedben írd a pontozott helyekre a megfelelő mondat betűjelét úgy, hogy a megfogalmazott kijelentés igaz legyen!

Ha *A igaz*, akkor csak a(z) … *igaz*, a többi hír *hamis*.

Ha *A hamis*, akkor csak a(z) …-ről tudjuk biztosan, hogy *igaz*, a többi hír azonban lehet *igaz* is és *hamis* is.

Ha *C igaz*, akkor biztos, hogy … *igaz*, *A* … és *F* pedig *hamis*, de előfordulhat, hogy a(z) … *igaz*, meg az is, hogy *hamis*.

Ha *C hamis*, akkor … biztosan *igaz*, … biztosan *hamis*, a többi hír azonban lehet *igaz* is és *hamis* is.

Fogalmazzatok meg szóban a fentiekhez hasonló, igaz állításokat!

2 Van-e az 1. feladat szerint a 11. B lánycsapatának olyan helyezése, amely esetében mind a 6 adott mondat tartalma hamis? Ha igen, akkor ez hányadik helyezés, ha nem, akkor miért nem?

Megfigyelések

Érdekes kapcsolatot találunk az *A* és a *B* mondat között:

ha A igaz, akkor B hamis, ha A hamis, akkor B igaz; és hasonlóan:

ha B igaz, akkor A hamis, ha B hamis, akkor A igaz.

Ugyanezt tapasztaljuk a *C* és a *D* kijelentés esetében:

ha C igaz, akkor D hamis, ha C hamis, akkor D igaz; és hasonlóan:

ha D igaz, akkor C hamis, ha D hamis, akkor C igaz.

A logika szakkifejezései szerint *A*, *B*, *C*, *D*, *E* és *F* egy-egy *állítás*, *A* és *B egymás tagadása*, *C* és *D egymás tagadása*.

E és *F* nem tagadása egyik szereplő állításnak sem. Miért? Például *E* „ellentétes tartalmú” *A*-val (egyszerre nem lehet *igaz* mindkettő), de több olyan eset is van, amikor mindkettő hamis (ha a csapat sem második, sem utolsó nem lett). Hasonlóan: a *C* nem tagadása az *F*-nek, mert előfordulhat, hogy mindkettő *hamis*.

ELMÉLET

Ha hallunk vagy olvasunk egy mondatot, akkor sokszor azonnal tudjuk, hogy a tartalma igaz vagy hamis. Más esetekben kisebb-nagyobb töprengés után tudjuk eldönteni, hogy mi vele a helyzet. Vannak olyan mondatok is, amelyekről egyáltalán nem mondhatjuk ki azt, hogy a tartalmuk igaz vagy hamis.

1. A logikában azokat a kijelentő mondatokat nevezzük **állításoknak** (más szóval: **kijelentéseknek**), amelyekről egyértelműen eldönthető, hogy a tartalmuk igaz vagy hamis.

Példák

Igaz állítás	Hamis állítás	Nem állítás (nem kijelentés)
A 29 prímszám.	A 25 és a 35 legnagyobb közös osztója 15.	Hány óra van?
Minden háromszögben 180° a belső szögek összege.	Minden háromszög beírt körének középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.	Bence okosabb, mint Hajni.
A Nap nagyobb, mint a Hold.	A naptárban szerda után kedd következik.	A legszebb virág a kikerics.

2. Egy állítás *igaz* vagy *hamis* lehet csak, **harmadik eset nincs**.
Ha egy állítás nem *igaz*, akkor csak *hamis* lehet és hasonlóan: ha egy állítás nem *hamis*, akkor csak *igaz* lehet.

Megjegyzés
Azt is szoktuk mondani, hogy egy **állítás logikai értéke** csak igaz vagy hamis lehet.

3. Minden állításnak van **tagadása**, ami egy másik állítás. Egy A állítás tagadása akkor igaz, ha az A hamis, és akkor hamis, ha az A igaz. Az A állítás tagadásának a jele: $\neg A$ (olvasd: „nem A”).

FELADAT

3 Melyik állítás lesz az első állítás tagadása, B vagy C? Bár mindkettő olyan, hogy nem teljesül egyszerre az A állítással, de a kettő közül csak az egyik olyan, hogy pontosan akkor igaz, amikor az A hamis, és akkor hamis, amikor az A igaz. Csak ezt nevezzük az A állítás tagadásának. Válaszd ki, melyik ez!

a) *A:* Panniék kutyája fekete.
B: Panniék kutyája tarka.
C: Panniék kutyája nem fekete.

b) *A:* Többen vagyunk az osztályban, mint 32.
B: Kevesebben vagyunk az osztályban, mint 32.
C: Kevesebben vagyunk az osztályban, mint 33.

4 Istvánék utcájában parkol néhány autó. István körbenéz, és megszólal:
„Az utcában minden autó Opel.”
Válaszd ki, hogy a következő állítások közül melyik tagadása István mondatának! Több jó megoldást is találsz!

A: Nincs az utcában Opel.
B: Az utcában minden autó Skoda.
C: Van olyan autó az utcában, amely nem Opel.
D: Az utcában nem minden autó Opel.
E: Van az utcában Skoda is.

5 Megadunk 5 állítást:
A: A 0-ra végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
B: A 0-ra és az 5-re végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
C: Nem igaz, hogy a 0-ra végződő természetes számok oszthatók 5-tel.
D: A 0-ra végződő természetes számok nem oszthatók 5-tel.
E: Az 5-tel osztható természetes számok nem mind végződnek 0-ra.

a) Melyik igaz, melyik hamis?
b) A B, C, D, E kijelentések közül melyik lehet az A állítás tagadása?

6 Hosszú Katinka, többszörös olimpiai és világbajnok úszónk, 20 éves korában 2009-ben szerezte élete első világbajnoki érmeit. Részlet egy 2009-ben írt újságcikkből: „A 2009-es római úszó-világbajnokságon Verrasztó Evelyn és a selejtezőben új Európa-rekordot elérő (2 p 9,12 mp) Hosszú Katinka (a képen) is bejutott a 200 m-es női vegyes úszás döntőjébe, előbbi az ötödik, utóbbi pedig a hetedik legjobb eredménnyel. A döntőben Katinka nagyszerűen úszva, gyönyörű hajrával, saját rekordját megjavítva, 2 p 7,46 mp-es új Európa-csúccsal csapott a célba. Verrasztó Evelyn is kiváló teljesítményt nyújtott, és végül a hetedik helyen zárt."

a) Mi volt a két úszónő sorrendje a selejtezőben, a középdöntőben és a döntőben?
b) Mennyit javított Hosszú Katinka a saját Európa-rekordján?
c) Biztos, lehetséges vagy lehetetlen az, hogy Hosszú Katinka megnyerte ezt a versenyt?
d) Mit felelnél az előző kérdésre, ha Európa-bajnokságról lenne szó?
e) Az újsághír ismeretében biztos, lehetséges vagy lehetetlen az, hogy Hosszú Katinka ezen a versenyen bronzérmet nyert? (Válaszod helyességéről meggyőződhetsz, ha utánanézel, mi történt valójában.)

HÁZI FELADAT

1 Fogalmazd meg az órai 1. feladatban szereplő állítások tagadását! Mit tapasztalsz?

2 Részlet egy újságcikkből: „Verrasztó Evelyn szerezte a magyar úszócsapat első érmét 2009. december 10-én, az isztambuli rövidpályás Európa-bajnokságon, ahol a 200 m vegyes döntőjében 2:04.64-es (2 p 4,64 mp) világcsúcsidővel érdemelte ki az első helyet. Nyolc nappal később a manchesteri úszógálán ugyanezen a távon az amerikai Julia Smit 2:04.60 perccel (2 p 4,60 mp) csapott a célba." Biztos-e, lehetséges-e, lehetetlen-e, hogy

a) 2009. december 11-én Verrasztó Evelyn tartotta a 200 m-es rövidpályás női vegyes úszás Európa-csúcsát?
b) 2009. december 19-én 2:04.64 perc volt a 200 m-es női rövidpályás vegyes úszás Európa-csúcsa?
c) 2009. december 19-én 2:04.60 perc volt a 200 m-es női rövidpályás vegyes úszás világcsúcsa?

3 Cseh László Európa-csúcsot úszott a rövidpályás országos bajnokságon. Közvetlenül a verseny után
a) Dönci azt állítja, hogy a magyar országos csúcs ennél biztosan gyengébb;

b) Bence azt, hogy az országos csúcs pontosan ugyanennyi;

c) Hajni szerint a világcsúcs ennél biztosan jobb.

Kinek van igaza?

4. Megadunk 7 állítást:

A: A páros számok mind 2-re végződnek.

B: A páros számok mind 0-ra végződnek.

C: A páros számok nem mind végződnek 2-re.

D: A páros számok 2-re vagy 0-ra végződnek.

E: A 2-re végződő számok páros számok.

F: Van olyan páros szám, amely 2-re végződik.

G: Van olyan páros szám, amely nem 2-re végződik.

a) Melyik igaz, melyik hamis?

b) A fenti kijelentések között van-e két olyan, amely egymás tagadása?

RÁADÁS

1. Ⓚ **a)** Egy bérház bérlői elhatározták, hogy megvásárolják az épületet. Úgy döntöttek, hogy mindenki arányosan járul hozzá a vételár kifizetéséhez, mégpedig aszerint, hogy mekkora az általa bérelt lakás alapterülete. Tehát ha például valaki a 20%-át bérli a teljes bérelhető területnek, akkor ő a vételár 20%-át fizeti ki.

Döntsd el az alábbi kijelentések mindegyikéről, hogy igaz vagy hamis! Válaszaidat indokold a füzetedben!

A: A nagyobb alapterületű lakásban lakó többet fizet 1 m^2 megvásárlásáért, mint a kisebb lakásban lakó.

B: Ha ismerjük két lakás alapterületét és tudjuk, hogy az egyik lakás bérlője mennyivel járul hozzá a vételárhoz, akkor tudjuk azt is, hogy a másik lakás bérlője mennyit fizet.

C: Ha ismerjük a bérház vételárát és tudjuk, hogy mennyivel járulnak hozzá a vételárhoz az egyes bérlők, akkor azt is tudjuk, hogy mekkora az egyes lakások alapterülete.

D: Ha sikerülne 10%-ot lealkudni az épület vételárából, akkor minden bérlőnek 10%-kal kevesebbet kellene fizetnie a bérház megvásárlásához.

b) A bérház 3 lakásból áll, ezek alapterülete rendre 95 m^2, 85 m^2 és 70 m^2.
A bérház vételára 30 millió forint. Mennyivel kell hozzájárulnia a 85 m^2-es lakás tulajdonosának a vételárhoz?

2. Ⓚ Az egyik 7. osztályos matematikaórán mindegyik tanuló magasságát megmérték. A mérések szerint a fiúk átlagmagassága 160 cm, a lányoké pedig 150 cm. Anna volt a legmagasabb, 180 cm, Dani a legalacsonyabb: 130 cm. A mérés napján két tanuló hiányzott, de másnap mindenki ott volt a matematikaórán, a két előző napi hiányzó is. Megmérték ennek a két tanulónak a magasságát is, aztán újraszámolták az átlagmagasságokat. Meglepetve tapasztalták, hogy sem a fiúk, sem a lányok átlagmagassága nem változott. Milyen következtetéseket lehet levonni a fentiekből? Döntsd el az alábbi kijelentésekről, hogy helyes következtetések-e! Válaszaidat indokold is füzetedben!

A: Mindkét hiányzó tanuló lány volt.

B: Az egyik hiányzó tanuló lány volt, a másik fiú.

C: Mindkét hiányzó tanulónak ugyanakkora a magassága.

D: A jelen lévő tanulók magasságának átlaga az első napon ugyanannyi volt, mint a második napon.

E: A második napon is Dani volt a legalacsonyabb a tanulók között.

2 IGAZ VAGY HAMIS? FOGLALJUK TÁBLÁZATBA!

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párban! A füzetbe készítsétek el a táblázatokat, és töltsétek ki!

1. Mi van a szobában, lány vagy szörny? A tavalyi tanév végén már találkozhattatok egy ilyen jellegű feladattal. Most négy esetben gondoljátok végig, van-e olyan szoba, amelyben biztosan lány van, és vajon melyik az! A táblázatok segítenek a megoldásban.

A orosz Zaptor – Kovalens Kapitánnyal folytatott csatája során – foglyul ejtett néhány ártatlan lányt, majd erődjébe zárta. Mikor a Kapitány sarokba szorította Zaptort, ő a következő feladványok elé állította hősünket. A torony mindegyik emeletén két ajtó található. Az ajtók mögött vagy egy túszul ejtett lány van, vagy Zaptor egy félresikerült kísérletének végeredménye.

a) Az egyik felirat igaz, a másik hamis.
Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben egy lány, a másikban egy szörny.

Töltsétek ki a táblázatot!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e az „egyik igaz, másik hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Melyik szobát érdemes választani?

b) Vagy mindkét felirat igaz, vagy mindkettő hamis.
Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben lány, a másikban egy szörny.

Töltsétek ki a táblázatot!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e a „vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Gondoljátok végig egy másik irányból is! Töltsétek ki a következő táblázatot!

Az 1. szoba felirata	A 2. szoba felirata	Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Lehetséges?
igaz	igaz			
hamis	hamis			

Melyik szobát érdemes választani?

c) A következő emeleten az ajtók felirata más.
Vagy mindkét felirat igaz, vagy mindkettő hamis.
Lehet, hogy mindkét szobában egy-egy lány van, de az is lehet, hogy egyikben lány, a másikban egy szörny.

Töltsétek ki a táblázatokat!

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel-e a „vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis” feltételnek?
Lány	Lány			
Lány	Szörny			
Szörny	Lány			

Az 1. szoba felirata	A 2. szoba felirata	Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Lehetséges?
igaz	igaz			
hamis	hamis			

Melyik szobát érdemes választani?

d) Ha az 1. szobában lány van, akkor a felirat rajta igaz, ha szörny van benne, akkor viszont hamis. Míg a 2. szobában pont fordított a helyzet, ha ott lány van, akkor a felirat hamis, ha szörny van benne, akkor igaz.

Melyik szobát érdemes választani?

Ez van az 1. szobában	Ez van a 2. szobában	Az 1. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel az 1. szobáról szóló feltételnek?	A 2. szoba felirata igaz vagy hamis?	Megfelel a 2. szobáról szóló feltételnek?
Lány	Lány				
Lány	Szörny				
Szörny	Lány				

Miután harcképtelenné tette a gonosz pusztítót, a Kapitány kiszabadította és biztonságba helyezte a lányokat.

2 Egy úszóversenyen négy iskola csapata került döntőbe: az Aranyhegyi, a János-hegyi, a Lakihegyi és a Pál-völgyi. A végeredményről a következőket tudjuk:

– Az egyik szélső pályán úszó versenyző győzött.
– A fekete sapkás a sárga és a kék sapkás közé került.
– Csak egy olyan úszó volt, aki ugyanannyiadik helyezést ért el, mint ahányadik pályán úszott, és ez nem a győztes volt.
– A lakihegyisnek fekete volt a sapkája.
– A piros sapkás zöld úszónadrágban versenyzett.
– Az aranyhegyis és a lakihegyis pályája nem volt szomszédos.
– A sárga sapkás a 3. és 4. helyezett között úszott.
– A jános-hegyisnek belső pálya jutott.

a) Melyik iskola úszója lett a győztes?
b) Milyen színű sapkában úszott a 3. helyezett?
c) Kapott-e érmet az aranyhegyis versenyző?

Az alábbi táblázat segíthet a gondolatok rendszerezésében. Másold át a füzetedbe és töltsd ki!

Pálya	1-es pálya	2-es pálya	3-as pálya	4-es pálya
Iskola				
Sapka				
Helyezés				

Megjegyzés: Ez a feladat egy, Einstein nevéhez kapcsolható, logikai feladvány egyszerűsített változata. Állítólag az emberek 98%-a nem tudja helyesen megoldani Einstein feladatát. A Ráadásban bebizonyíthatod, hogy te a kivételes 2%-hoz tartozol!

HÁZI FELADAT

1 Egy törpe beleesett a tündék csapdájába, de azok nemes lelkek révén felajánlják neki, hogy szabadon bocsájtják, ha elsőre megtalálja a tömlöc kulcsát.

a) Melyik ládát válassza, ha a tündék azt is elárulják, hogy a három állítás közül csak egy igaz? Töltsd ki a következő táblázatot a füzetedben:

1. láda tartalma	2. láda tartalma	3. láda tartalma	1. láda felirata igaz vagy hamis?	2. láda felirata igaz vagy hamis?	3. láda felirata igaz vagy hamis?	Teljesül-e, hogy „a 3 állítás közül csak egy igaz”?
kulcs	–	–				
–	kulcs	–				
–	–	kulcs				

b) Hogyan módosul a helyzet, ha a három állítás közül csak egy hamis? Készíts olyan táblázatot, amely segít a megoldásban!

2 Három indián ül a tűz körül: Fehér Tigris, Szürke Egér, Sárga Irigység. Egyszer csak megszólal Fehér Tigris:
– Egyikünk sárga ruhát visel, van közöttünk fehér ruhát és szürke ruhát viselő is, de egyikünk sem olyan színű ruhában van most, mint ami a nevében is szerepel.
– Valóban! – mondta a sárga ruhás.
Milyen színű ruhát viselt Szürke Egér?

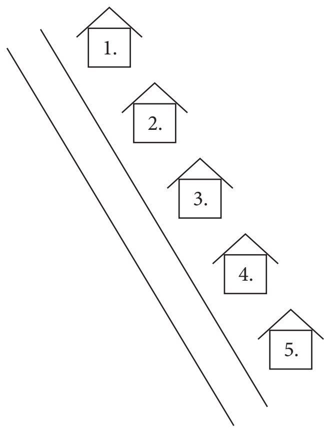
3 Frédi a vásárban három eladótól próbál nyakláncot vásárolni. A három eladónál összesen kétféle egységáron lehetne nyakláncot venni, de mindegyik eladónak csak egyfajta egységárú nyaklánca van. Frédi mindhárom eladónak – az idősnek, a középkorúnak és a fiatalnak is – feltesz egy kérdést:

A fiataltól ezt kérdezi: „A középkorú eladó drágább nyakláncot árul, mint az idősebb?”
A középkorútól ezt kérdezi: „Az idősebb eladó nyaklánca drágább, mint a fiatalé?”
Az idősebbtől pedig ezt: „Vehetek-e 100 garasért két nyakláncot a vásárban?”

Mind a három kérdésre ugyanazt a választ (igen, vagy nem) kapta. Vajon sikerült-e Frédinek 100 garasért megvennie a két nyakláncot a vásárban?

RÁADÁS

Egy utcában van öt egymás melletti, más-más színű ház. Mindegyik házban más nemzetiségű férfi lakik. Mind más-más hangszeren játszik, más italt kedvel és más állatot tart.



1. Az angol piros színű házban lakik.
2. A svédnek kutyája van.
3. A dán teát iszik.
4. A zöld ház közvetlenül a fehér mellett balra van.
5. A zöld ház tulajdonosa kávét iszik.
6. Aki zongorázik, annak papagája van.
7. A sárga ház tulajdonosa dobol.
8. A középső ház tulajdonosa tejet iszik.
9. A norvég az első házban lakik.
10. A hegedűn játszó férfi szomszédja macskát tart.
11. A brácsás férfi sört iszik.
12. A lovat tartó férfi a dobos mellett lakik.
13. A német trombitál.
14. A norvég a kék ház mellett lakik.
15. A hegedűn játszó férfi szomszédja vizet iszik.

Ki tart halakat? (Segíthet az alábbi táblázat a gondolkodásban. Másold át a füzetedbe!)

	1. ház	2. ház	3. ház	4. ház	5. ház
Ház színe P, S, F, Z, K					
Lakó nemzetisége A, Né, No, D, S					
Hangszer Z, B, D, H, T					
Ital Tea, K, V, S, Tej					
Állat K, P, M, L, H					

Keressetek ezekhez hasonló feladványokat az interneten és osszátok meg egymással őket!

3 ÖSSZETETT ÁLLÍTÁSOK

KIDOLGOZOTT FELADAT

1. Két idősebb férfi, Gyula és Miklós beszélgetnek.
– Emlékszel, Miklós, Kulcsár Győzőre? Ő aztán tudott vívni! – mondja Gyula.
– Igen, valamikor a 70-es években az iskolatársaimmal izgatottan lestük, szerez-e olimpiai aranyérmet. Úgy emlékszem, jól drukkoltunk.
– Én meg arra emlékszem, hogy mindkét olimpiáról hozott aranyérmet! – idézi fel a 70-es éveket Gyula.
Ki emlékszik helyesen?

Megoldás
A 70-es években két olimpia volt, 1972-ben Münchenben és 1976-ban Montrealban.

Miklós emléke két részre bontható:

Kulcsár Győző aranyérmet szerzett a müncheni olimpián	*Kulcsár Győző aranyérmet szerzett a montreali olimpián*
IGAZ, párbajtőrcsapattal aranyérmet nyert.	**HAMIS**, ekkor nem nyert aranyérmet.

Miklós emléke szerint Kulcsár Győző *a müncheni olimpián VAGY a montreali olimpián aranyérmet nyert.*
A két állítás egyike igaz, ezért Miklós jól emlékezett.

Gyula emléke ugyanerre a két részre bontható:
Gyula emléke szerint Kulcsár Győző *a müncheni olimpián is ÉS a montreali olimpián is aranyérmet nyert.*
Gyula rosszul emlékezett. Akkor lenne igaza, ha az állítás mindkét része igaz lenne.

2. Igaz-e a következő állítás:
– *Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert az úszó-világbajnokságon vagy az olimpián.*
Bence elhatározta, hogy utánanéz ennek a dolognak.

Megoldás
1991-ben úszó-világbajnokság volt Perth-ben, 1992-ben pedig olimpia Barcelonában.
Az állítás két részre bontható:

Egerszegi Krisztina aranyérmet nyert 1991-ben a világbajnokságon	Egerszegi Krisztina aranyérmet nyert 1992-ben az olimpián.

A két rész **VAGY** kötőszóval kapcsolódik egymáshoz. A teljes állítás **IGAZ**, ha a két rész közül *legalább az egyik* **IGAZ**. Nézzünk utána először a második résznek! Ez a rész **IGAZ**: Egerszegi Krisztina három számban is nyert a barcelonai olimpián.
Nem is kellene ellenőrizni az 1991-es úszó-világbajnokságot, már tudjuk, hogy a feladat állítása **IGAZ**, akkor is, ha nyert, akkor is, ha nem nyert 1991-ben.

Megjegyzés:
Figyeljük meg a következő két állítást!
Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert a világbajnokságon vagy az olimpián.
Egerszegi Krisztina 1991–1992-ben aranyérmet nyert a világbajnokságon és az olimpián.

Mivel Egerszegi Krisztina nemcsak az olimpián, hanem az 1991-es világbajnokságon is aranyérmet nyert, (két számban is), ezért mindkét állítás **IGAZ**.

ELMÉLET

Két-két állítást (kijelentést) meghatározott módon összekapcsolva olyan újabb állításokhoz juthatunk, amelyek logikai értékét az eredeti állítások logikai értéke egyértelműen meghatározza. Az ilyen összekapcsolásokat **logikai műveleteknek** nevezzük.

Figyeljünk meg két egyszerű logikai műveletet!

Definíció: A **VAGY-művelet** (latinul: *diszjunkció*)
Legyen A és B egy-egy állítás *(kijelentés)*. ***A* vagy *B*** (jelekkel: $A \vee B$) azt az állítást jelenti, amely *igaz*, ha A és B közül legalább az egyik igaz, és *hamis*, ha mind A, mind B hamis.

Például, ha
A: Hajni jelest kapott matematikából; *B:* Hajni jelest kapott történelemből,
akkor $A \vee B$ azt jelenti, hogy Hajni jelest kapott matematikából vagy történelemből (vagy mindkettőből).

A VAGY-művelet igazságtáblázata:

Ha A	és B	akkor $\boldsymbol{A \vee B}$
igaz	igaz	**igaz**
igaz	hamis	**igaz**
hamis	igaz	**igaz**
hamis	hamis	**hamis**

vagy egyszerűbben:

A	B	$\boldsymbol{A \vee B}$
i	i	**i**
i	h	**i**
h	i	**i**
h	h	**h**

Definíció: Az **ÉS-művelet** (latinul: *konjunkció*)
Legyen A és B egy-egy állítás *(kijelentés)*. ***A* és *B*** (jelekkel: $A \wedge B$) azt az állítást jelenti, amely *igaz*, ha A is és B is igaz, és minden más esetben *hamis*.

Például, ha
A: Hajni jelest kapott matematikából; *B:* Hajni jelest kapott történelemből,
akkor $A \wedge B$ azt jelenti, hogy Hajni jelest kapott matematikából is és történelemből is.

Az ÉS-művelet igazságtáblázata:

Ha A	és B	akkor $\boldsymbol{A \wedge B}$
igaz	igaz	**igaz**
igaz	hamis	**hamis**
hamis	igaz	**hamis**
hamis	hamis	**hamis**

vagy egyszerűbben:

A	B	$\boldsymbol{A \wedge B}$
i	i	**i**
i	h	**h**
h	i	**h**
h	h	**h**

FELADAT

1. Melyik állítás igaz, melyik hamis?
a) 24 osztható 3-mal vagy 4-gyel.
b) 50 osztható 5-tel és 10-zel.
c) 36 osztható 6-tal és 8-cal.
d) 48 osztható 12-vel vagy 15-tel.

2. Írj három olyan pozitív egész számot, amely
a) osztható 18-cal vagy 36-tal;
b) osztható 18-cal és 36-tal;
c) osztható 18-cal és nem osztható 36-tal;
d) osztható 18-cal vagy nem osztható 36-tal!

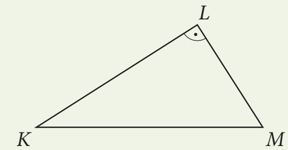
3 Két kijelentést fogalmaztunk meg a rajzon látható *KLM* háromszögre vonatkozóan.

A: A *KLM* háromszög egyenlő szárú; *B:* A *KLM* háromszög derékszögű.

a) Add meg *A*, illetve *B* logikai értékét (igaz vagy hamis)!

b) Fogalmazd meg az $A \vee B$, illetve az $A \wedge B$ kijelentést!

c) Döntsd el, hogy a b)-ben megfogalmazott két kijelentésnek mi a logikai értéke!



ELMÉLET

1. Kapcsoljunk össze *ha..., akkor* kötőszavakkal állításokat: *ha A, akkor B*. Ezzel azt állítjuk, hogy ha *A* állítás igaz, akkor *B* állítás is igaz. Ha azonban *A* állítás hamis, akkor a *ha A, akkor B* kijelentés akkor is igaz, ha *B* igaz, és akkor is igaz, ha *B* hamis.
2. Amikor *akkor és csak akkor* kötőszavakkal kapcsolunk össze állításokat, akkor azt állítjuk, hogy a két állítás logikai értéke megegyezik: vagy mindkettő igaz, vagy mindkettő hamis.

Megjegyzés: A Ráadásban többet is megtudhatsz ezekről a műveletekről.

FELADAT

4 Milyen logikai műveleti jelet kell írni a pontozott részre, hogy a kijelentés igaz legyen?

a) Az $(x+3)(5-x)$ szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha $x+3=0 \ldots 5-x=0$.

b) Az $(x+3)^2+(5-x)^2$ összeg akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha $x+3=0 \ldots 5-x=0$.

5 Milyen logikai műveleti jelet kell írni a pontozott részekre, hogy az állítás igaz legyen?

Az *ab* szorzat értéke akkor és csak akkor pozitív, ha $(a>0 \ldots b>0) \ldots (a<0 \ldots b<0)$.

6 Legyen *A* is és *B* is egy-egy állítás (kijelentés). Másold be az alábbi táblázatot a füzetedbe, és töltsd ki az üres mezőket a megfelelő logikai értékekkel! Jelölés: $\neg A$ (= nem *A*) az *A* kijelentés tagadása. Segítségképpen néhány mezőt kitöltöttünk.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$
i	i	h				i	i		
i	h					h	i		
h	i								
h	h								

HÁZI FELADAT

1 Rajzolj olyan ábrát, amelyre igaz az alábbi állítás!

a) Az *ABC* háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

b) Az *ABCD* négyszög rombusz és téglalap.

c) Az *ABCD* négyszög deltoid vagy paralelogramma.

d) A megrajzolt sokszög konvex vagy belső szögeinek összege 540°.

2 Rajzolj olyan ábrát, amelyre nem igaz (hamis) az alábbi állítás!

a) Az *ABC* háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

b) Az *ABCD* négyszög rombusz és téglalap.

c) Az *ABCD* négyszög deltoid vagy paralelogramma.

d) A megrajzolt sokszög konvex vagy belső szögeinek összege 540°.

3 Egészítsd ki az állítást úgy, hogy igaz legyen!

a) Az $(x-8)(7-2x)$ szorzat akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha …

b) Az $(x-8)^2+(7-2x)^2$ összeg akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha …

RÁADÁS

I. Implikáció

Legyen A és B is egy-egy kijelentés.

A belőlük képzett „Ha A, akkor B.” kijelentésre azt mondjuk, hogy az IMPLIKÁCIÓ logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. Az implikáció jele: $\rightarrow$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \rightarrow B$
igaz	igaz	**igaz**
igaz	hamis	**hamis**
hamis	igaz	**igaz**
hamis	hamis	**igaz**

vagy egyszerűbben:

A	B	$A \rightarrow B$
i	i	**i**
i	h	**h**
h	i	**i**
h	h	**i**

Az $A \rightarrow B$ kijelentés tehát pontosan akkor hamis, ha A igaz, B pedig hamis.

II. Ekvivalencia

Az A és a B kijelentésből képzett „A akkor és csak akkor, ha B.” kijelentésre azt mondjuk, hogy az EKVIVALENCIA logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. Az ekvivalencia jele: $\leftrightarrow$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \leftrightarrow B$
igaz	igaz	**igaz**
igaz	hamis	**hamis**
hamis	igaz	**hamis**
hamis	hamis	**igaz**

vagy egyszerűbben:

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	i	**i**
i	h	**h**
h	i	**h**
h	h	**i**

Az $A \leftrightarrow B$ kijelentés tehát pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke egyenlő.

III. Kizáró vagy

Az A és a B kijelentésből képzett „Vagy A vagy B.” kijelentésre azt mondjuk, hogy a VAGY-VAGY (kizáró vagy) logikai művelettel kapcsoltuk össze a két kijelentést. A kizáró vagy jele: $\oplus$.

Ennek a logikai műveletnek az igazságtáblázata a következő:

A	B	$A \oplus B$
igaz	igaz	**hamis**
igaz	hamis	**igaz**
hamis	igaz	**igaz**
hamis	hamis	**hamis**

vagy egyszerűbben:

A	B	$A \oplus B$
i	i	**h**
i	h	**i**
h	i	**i**
h	h	**h**

Az $A \oplus B$ kijelentés tehát pontosan akkor igaz, ha A és B logikai értéke különböző.

Például: A „Vagy a cipőt veszed meg vagy a kabátot (veszed meg).” összetett kijelentés igaz, ha csak az egyik tárgyat vásárolod meg, hamis, ha mindkettőt vagy egyiket sem.

A fejlettebb számológépek és a számítógépek ismerik a logikai műveleteket is. Általában a következő névvel lehet ezekre a műveletekre hivatkozni:

Értelme	Gépi neve	A művelet neve
NEM	NOT	tagadás
ÉS	AND	konjunkció
VAGY	OR	diszjunkció
VAGY-VAGY	XOR	kizáró vagy

Ezekkel a műveletekkel informatika órán is találkozhattál már, az Excel táblázat kezelésének tanulásakor. Nézz utána, hogy mit jelent a NAND és NOR művelet és milyen egyéb logikai műveletek találhatók az Excelben!

FELADAT

1 Melyik állítás igaz, melyik hamis? Válaszodat indokold!

A Ha egy valós szám reciproka egyenlő saját magával, akkor a négyzete is egyenlő saját magával.

B Ha egy valós szám négyzete egyenlő saját magával, akkor reciproka is egyenlő saját magával.

C Ha egy valós szám négyzete kisebb, mint maga a szám, akkor a szám kisebb mint 1.

D Ha egy valós szám kisebb, mint 1, akkor a négyzete kisebb, mint maga a szám.

E Egy valós szám négyzete akkor és csak akkor kisebb, mint saját maga, ha a szám pozitív, de kisebb, mint 1.

2 Írd fel a következő kifejezések igazságtáblázatát!

a) $A \rightarrow \neg B$
b) $\neg A \vee \neg B$
c) $A \leftrightarrow (A \vee B)$
d) $(A \wedge B) \oplus \neg B$

Melyik kifejezések ekvivalensek? Van-e köztük két olyan, hogy implikáció van köztük?

4 VAGY-MŰVELET, ÉS-MŰVELET NYITOTT MONDATOK ESETÉBEN

BEVEZETŐ

Figyeljünk meg egy olyan nyitott mondatot, amelyből egy mondatrész hiányzik:

A Tisza című verset … írta.

Ha a kipontozott helyre beírjuk egy költő nevét, akkor egy kijelentést kapunk:

A Tisza című verset József Attila írta.

Ez hamis kijelentés.

A Tisza című verset Petőfi Sándor írta.

Ez igaz kijelentés.

Ha nem Petőfi nevét írjuk be a kipontozott helyre, akkor a kapott állítás logikai értéke: hamis.

Figyeljünk meg néhány olyan nyitott mondatot, amelyből egy vagy két szám hiányzik:

6-szor … nagyobb, mint 100;

$6x > 100$;

… szor … nagyobb, mint 100;

$xy > 100$;

6-szor … nagyobb, mint …;

$6x > y$.

Ha a kihagyott helyekre, illetve az x, y betűk helyére egy-egy számot írunk, kijelentéseket, állításokat kapunk. Ezek a kijelentések lehetnek igazak vagy hamisak.

- Ha például a $6x > 100$ nyitott mondatba 8-at írunk az x helyébe, akkor a $6 \cdot 8 > 100$ hamis kijelentést kapjuk.

Ha nem 8-at, hanem például 18-at írunk, akkor a $6 \cdot 18 > 100$ igaz kijelentést kapjuk.

- Ha például a $6x > y$ nyitott mondatba 8-at írunk az x helyébe és 2-t az y helyébe, akkor a $6 \cdot 8 > 2$ igaz állítást kapjuk, ha 3-at írunk az x helyébe és 22-t az y helyébe, akkor a $6 \cdot 3 > 22$ hamis állítást kapjuk.

A nyitott mondat önmagában sem nem igaz, sem nem hamis!

A VAGY-műveletet meg az ÉS-műveletet nyitott mondatok esetére is értelmezzük.

KIDOLGOZOTT FELADAT

Megadunk két nyitott mondatot, A-t és B-t, alaphalmaznak mindkettőhöz a 15-nél kisebb pozitív egész számok halmazát választjuk.

A: az n egy 4 és 12 közötti egész szám,

B: az n prímszám.

Írjuk a nyitott mondat változója (n) helyébe az alaphalmaz elemeit, és vizsgáljuk meg, hogy az így kapott kijelentések igazak vagy hamisak! Foglaljuk táblázatba az eredményeket! (Például, ha n helyébe a 3-at írjuk, akkor az A nyitott mondatból az „*a 3 egy 4 és 12 közötti egész szám*” kijelentést kapjuk, míg a B nyitott mondatból az „*a 3 prímszám*” kijelentést. Az első kijelentés *hamis*, a második *igaz*. Lásd a sötétített oszlopot!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	*h*	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*
B	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*

Az A nyitott mondat igazsághalmaza: $\{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$, a B nyitott mondat igazsághalmaza: $\{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$.

Itt $\boldsymbol{A \vee B}$ azt a nyitott mondatot jelenti, amely

- **igaz**, ha olyan 15-nél kisebb pozitív egész számot választunk n-nek, amelynek esetében *az A és a B nyitott mondatok közül legalább az egyik igaz*;
- **hamis**, ha olyan 15-nél kisebb pozitív egész számot választunk n-nek, amelynek esetében *az A és a B nyitott mondat is hamis*.