1. A számok világa

A számok világa

Mindennapi életünkben fontos szerepet játszanak a számok. Elképzelhetetlen az élet nélkülük. Az emberek először dolgokat számláltak, így keletkeztek a természetes számok. Aztán osztozkodtak, ebből jöttek létre a törtek. Az adósság feljegyzése tette szükségessé a negatív számok létrejöttét.

A korábbi években nyomonkövettük a számok kialakulását, fejlődését. Most rendszerezzük a megismert fogalmakat, és kitekintünk a tanult számok halmazán kívülre.

A racionális számok

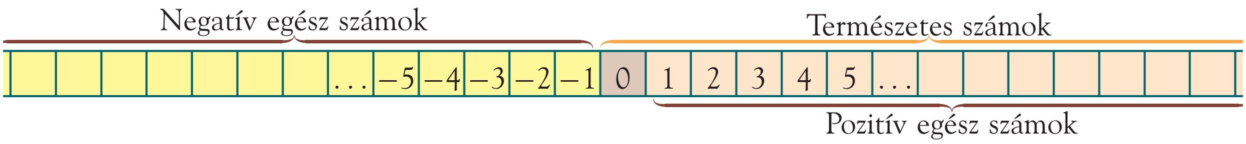
Emlékszel?

A természetes számok a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; . . . A természetes számok halmazát **N**-nel jelöljük.

A pozitív egész számok az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; . . .

A negatív egész számok a −1; −2; −3; −4; −5; −6; −7; −8; . . .

A természetes számok és a negatív egész számok együtt alkotják az egész számok halmazát. Ezt a halmazt **Z** jelöli.



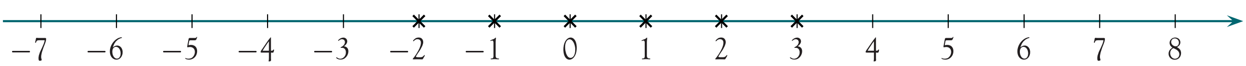
Az egész számok halmaza a pozitív egész számokból, a negatív egész számokból és a 0-ból áll.

1. példa

Van-e olyan egész szám, amely a −3 és a 4 közé esik?

Van-e olyan egész szám, amely a 3 és a 4 közé esik?

A −3 és a 4 közé esik a −2; −1; 0; 1; 2; 3, de a 3 és a 4 közé nem esik egész szám.



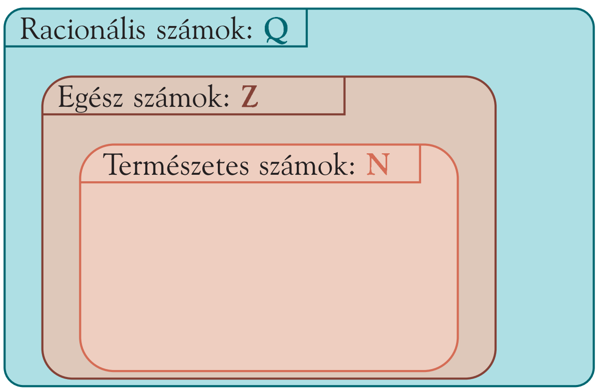
Racionális számoknak nevezzük azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

Például: 2 : 3; 4 : (−1); (−5) : 3; 10 : 2.

Egy racionális számot többféleképpen is felírhatunk, például: $\frac{1}{5} = 0{,}2$; $2{,}5 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

A racionális számok tizedestörtalakja lehet véges vagy lehet végtelen szakaszos.

Például $\frac{3}{2} = 1{,}5$; $\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots = 0{,}\dot{6}$.



Az egész számok is racionális számok. A racionális számok halmazát **Q**-val jelöljük.

2. példa

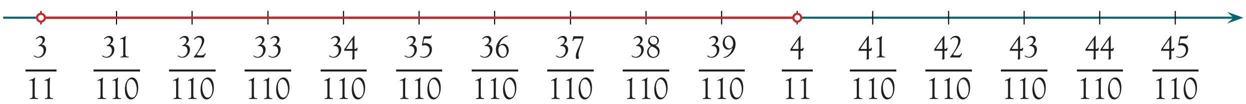
a) Van-e olyan racionális szám, amely a 3 és a 4 közé esik?

b) Van-e olyan racionális szám, amely a $\frac{3}{11}$ és a $\frac{4}{11}$ közé esik?

c) Van-e olyan racionális szám, amely az $\frac{1}{4}$ és az $\frac{1}{3}$ közé esik?

a) A 3 és a 4 közé esik például a 3,5. De közé esik a 3,1; a 3,2; a 3,3; …; 3,8; 3,9 is vagy a $3{,}\dot{1}4\dot{2}$ és még nagyon sok racionális szám. Sőt, akárhány 3 és 4 közé eső racionális számot megadhatunk. Ezek az ábrán a pirossal jelölt intervallumban találhatók.

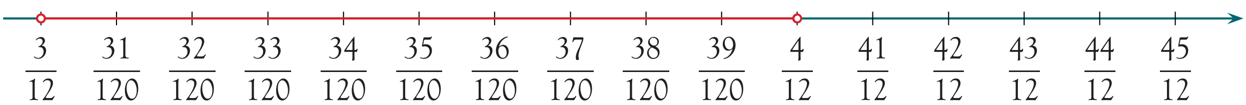
b) A $\frac{3}{11}$ és a $\frac{4}{11}$ közé is esik racionális szám. Ha bővítjük a törteket például 10-zel, akkor a $\frac{30}{110}$ és a $\frac{40}{110}$ között könnyű további racionális számokat találni, például: $\frac{31}{110}$; $\frac{32}{110}$; …; $\frac{39}{110}$. Persze nemcsak ez a kilenc, hanem sokkal több (akárhány) racionális szám megadható a két szám között. Ezek az ábrán a pirossal jelölt intervallumban találhatók.



Másképp is gondolkodhatunk. A tizedestörtalak segítségével is kereshetünk a két szám közé eső racionális számokat. $\frac{3}{11} = 0{,}272\ 727\ \ldots$; $\frac{4}{11} = 0{,}363\ 636\ \ldots$. A közéjük eső véges tizedestörtek biztosan racionálisak lesznek. Például: 0,3; 0,35; 0,31 stb.

Keress további, a $\frac{3}{11}$ és a $\frac{4}{11}$ közé eső véges tizedestörteket!

c) Az $\frac{1}{4}$ és az $\frac{1}{3}$ egy közös nevezője a 12, de közös nevezője a 120 is: $\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{30}{120}$; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{40}{120}$. Most már könnyen találunk az $\frac{1}{4}$ és az $\frac{1}{3}$ közé eső törteket, például: $\frac{31}{120}$; $\frac{32}{120}$; …; $\frac{39}{120}$. Ezek az ábrán a pirossal jelölt intervallumban találhatók.



Most is gondolkodhatunk másképpen is. $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{3} = 0{,}333\ 333\ \ldots$. E két szám közé esik például a 0,26; a 0,27; a 0,275 55; a 0,3 stb. Ezek is mind véges tizedestörtek (azaz racionális számok).

Keress további véges tizedestörteket, amelyek $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{3}$ közé esnek!

Fontos tudnivaló

Bármely két racionális szám között van racionális szám.

Emlékszel?

Ha két egész számot osztunk el egymással, és a hányados végtelen tizedestört, a *maradékok* között egyszer csak felbukkan egy olyan, amelyik már szerepelt. Ha a maradék ugyanaz, a hányados következő jegye is ugyanaz lesz. A hányados jegyei ezért ugyanabban a sorrendben ismétlődnek. Az ismétlődő részt **szakasznak** nevezzük, a hányadost pedig **végtelen szakaszos tizedestörtnek.**

3. példa

Igazoljuk, hogy $a = 0{,}4\dot{3}$; $b = 0{,}34\dot{3}$; $c = 0{,}334\dot{3}$ számok felírhatók két egész szám hányadosaként, tehát racionális számok!

$a = 0{,}4\dot{3} = 0{,}1 + 0{,}\dot{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$; $b = 0{,}34\dot{3} = 0{,}01 + \frac{1}{3} = \frac{103}{300}$;

$c = 0{,}334\dot{3} = 0{,}001 + \frac{1}{3} = \frac{1003}{3000}$.

Ezek a számok felírhatók két egész szám hányadosaként.

A tizedestörtalakjuk végtelen. Ha pedig két egész szám hányadosa nem véges, akkor végtelen szakaszos tizedestört.

Feladatok

A1 Ábrázold számegyenesen a következő számokat! Ha nem tudod meghatározni a pontos helyüket, akkor közelítően ábrázold! Állítsd őket nagyság szerinti sorrendbe!

$a = \frac{1}{6}$; $b = -\frac{2}{3}$; $c = 4{,}2$; $d = -0{,}16$; $e = 0{,}\dot{1}\dot{5}$;

$f = 15{,}3$; $g = \frac{31}{2}$; $h = 4\frac{1}{2}$; $i = \frac{4}{25}$; $j = -0{,}\dot{6}$.

A2 Válaszd ki, hogy melyek az egész számok az alábbiak közül! Válaszd ki, melyek a természetes számok!

$a = 4{,}0$; $b = \frac{3}{6}$; $c = -\frac{8}{2}$; $d = \frac{-15}{3}$;

$e = 3{,}\dot{9}$; $f = \frac{0}{-2}$; $g = \frac{42}{3}$; $h = 0$.

A3 Írd helyiérték-táblázatba az alábbi számokat! Állítsd őket nagyság szerint növekvő sorrendbe!

$a = 12{,}637$; $b = 12{,}0637$; $c = 12{,}6370$; $d = 12{,}607$;

$e = 12{,}603$; $f = 12{,}607$; $g = 126{,}37$; $h = 1{,}2637$.

K4 A 41,15; 410,15; 41,51; 14,015 számokat helyiérték-táblázatba írtuk, majd a fejlécet és néhány számjegyet letakartunk. Töltsd ki a fejlécet! Hová kerülhet a tizedesvessző? Írd be a hiányzó számjegyeket! Keress meg minden lehetséges megoldást!

			1			
		4		1		
	4					

K5 Készítsd kiselőadást a számok kialakulásáról! Nézd át a korábbi években használd tankönyveidet!

K6 Készíts halmazábrát az egész számok (**Z**) és a természetes számok (**N**) halmazáról! Az alaphalmaz legyen a racionális számok halmaza, **Q**!

Minden halmazrészbe, amelybe lehet, írj legalább két számot!

K7 Az alábbi adatok közül melyeket szoktunk egész számmal, melyet szoktunk törtszámmal megadni? Melyek lehetnek egészre kerekített törtszámok?

a) Az osztály létszáma.

b) Egy ember életkora években.

c) Egy ember tömege kilogrammban.

d) Egy buszon az ülőhelyek száma.

e) Egy lift teherbíró képessége főben.

f) Egy szoba szélessége méterben.

Beszéljétek meg csoportokban, adjatok meg mindegyikre egy-egy lehetséges értéket!

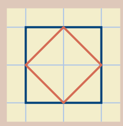
K8 Keress 3-3 olyan racionális számot, amelyek az adott két szám közé esnek!

a) $\frac{3}{5}$ és $\frac{4}{5}$; *b)* $\frac{2}{3}$ és $\frac{4}{3}$; *c)* 0,3 és $\frac{1}{3}$; *d)* $-\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{5}$.

A négyzetgyök fogalma

1. példa

A négyzetrácsos füzetedbe rajzolj olyan négyzetet, amelynek oldala 2 egység! Az oldalfelező pontok is egy négyzetet határoznak meg.



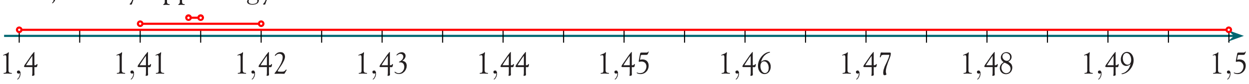
Mekkora a négyzetbe írt **kisebb négyzet** területe? Mekkora az oldala?

A nagy négyzet területe $2 \cdot 2 = 4$ területegység, a kihagyott háromszögek területe egyenként $\frac{1}{2}$ területegység, tehát a megmaradó **kisebb négyzet** területe $4 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ területegység.

A **kisebb négyzet** oldalának mérőszáma olyan szám, amelynek négyzete 2. Ilyen számot azonban nem ismerünk. Nem tudjuk, van-e ilyen szám, csak annyit tudunk róla, hogy a négyzete 2. Keressünk (a számológépen) szorzás segítségével megfelelő tizedestörtet!

Azt tapasztaljuk, hogy egy olyan számnál, amelynek a négyzete 2, tudunk kisebb és nagyobb számot találni. Van-e olyan tört, amely éppen egyenlő vele?

$$1^2 < 2 < 2^2$$
$$1,4^2 < 2 < 1,5^2$$
$$1,41^2 < 2 < 1,42^2$$
$$1,414^2 < 2 < 1,415^2$$
$$1,14142^2 < 2 < 1,4143^2$$



Kövessétek nyomon, és próbáljátok meg megérteni a következő gondolatmenet lépéseit!

Ha a négyzet oldala racionális szám, akkor azt felírhatjuk két egész szám hányadosaként. Legyen ennek az egyszerűsített alakja $\frac{a}{b}$. Ekkor a négyzet területe, azaz a $2 = \frac{a^2}{b^2}$.

– Lehet-e a és b is páros? Nem, mert akkor még lehetne egyszerűsíteni a törtet.

– Lehet-e, hogy a is és b is páratlan? Nem, mert akkor a négyzetük (a^2 és b^2) is páratlan lenne, tehát a hányadosuk nem lehetne páros.

– Lehet-e, hogy a páratlan és b páros? Nem, mert akkor a^2 páratlan és b^2 páros, de akkor $\frac{a^2}{b^2}$ nem lehetne egész szám.

– Lehet-e, hogy a páros és b páratlan? A páros számok négyzete, vagyis a^2 4-gyel is osztható (pl.: $2^2 = 4$; $4^2 = 16 = 4 \cdot 4$; $6^2 = 36 = 4 \cdot 9$; ...), a b^2 viszont páratlan. Vagyis ha a^2-et elosztjuk b^2-tel és egész számot kapunk, akkor az az egész szám osztható 4-gyel. Igen ám, de $\frac{a^2}{b^2} = 2$, ami nem osztható 4-gyel.

Tehát nincsen olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2. De a 2 területű négyzet oldala olyan szám, amelynek a négyzete éppen 2. **Vagyis a 2 területű négyzet oldalának hossza nem racionális szám.** A 2 területű négyzet oldalhossza nem racionális szám. Azt mondjuk, hogy **irracionális.**

Jelölés

A 2 területű négyzet oldalának hosszúságát így jelöljük: $\sqrt{2}$, és úgy olvassuk, hogy négyzetgyök 2.

Egy a szám négyzetgyöke azt a nemnegatív számot jelenti, amelynek négyzete éppen a.

Így jelöljük: $\sqrt{a}$, és így olvassuk: négyzetgyök a. $(\sqrt{a})^2 = a$.

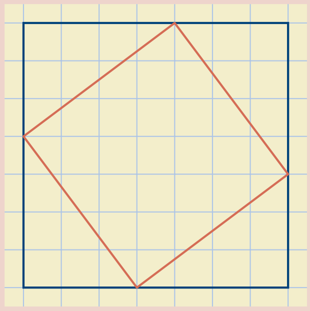
Például: $\sqrt{16} = 4$, mert $4^2 = 16$; $\sqrt{9} = 3$, mert $3^2 = 9$.

Az irracionális szó latin eredetű, jelentése *arányíthatatlan, aránytalan,* átvitt értelemben *képtelen, elképzelhetetlen, valótlan.*

$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373\ldots$. A $\sqrt{2}$ egy közelítését számológépen is megkaphatod.

2. példa

A négyzetrácsos füzetedbe rajzolj olyan négyzetet, amelynek oldala 7 egység! Az oldalakat (az ábra szerint) 3 : 4 arányban osztó pontokat összekötve ismét négyzetet kapunk. (Az oldalaik egyenlő hosszúak és egyenlő szögeket zárnak be egymással.) Mekkora a négyzet területe? Mekkora az oldala?

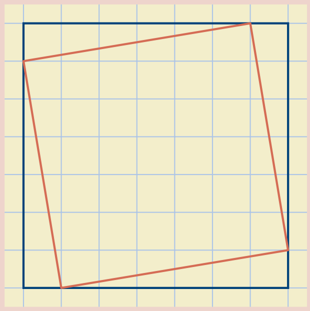


Ismét kiszámítjuk a nagyobb négyzet, illetve egy-egy háromszög területét. $49 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 25$. A kisebb négyzet területe 25 területegység, vagyis az oldalának a hossza 5 egység.

Látjuk tehát, hogy vannak olyan egész számot, amelyek négyzetgyöke is egész szám. Ezeket **négyzetszámoknak** nevezzük.

3. példa

A négyzetrácsos füzetedbe rajzolj olyan négyzetet, amelynek oldala 7 egység. Az oldalakat (az ábra szerint) 1 : 6 arányban osztó pontokat összekötve ismét négyzetet kapunk. (Az oldalaik egyenlő hosszúak és egyenlő szögeket zárnak be egymással.) Mekkora a négyzet területe? Mekkora az oldala?



A terület: $49 - 4 \cdot \frac{1 \cdot 6}{2} = 37$. A kisebb négyzet területe 37 területegység, vagyis az oldalának a hossza $\sqrt{37}$ egység.

Feladatok

A1 Keresd meg, hogy az alábbiak közül melyek a négyzetszámok! Ezek mely számok négyzetei?

$a = 1$; $b = 10$; $c = 16$; $d = -1$; $e = 0$; $f = 35$;
$g = 81$; $h = 124$; $i = 144$; $j = 121$; $k = 196$; $l = 169$.

K2 Keresd meg, hogy az alábbi számok mely számok négyzetei! Ha másképp nem megy, próbálkozz szorzással!

$a = 1{,}21$; $b = 4{,}41$; $c = 2{,}25$; $d = 12{,}25$; $e = 8{,}41$; $f = 2{,}56$.

K3 Határozd meg, hogy a $\sqrt{3}$ melyik két egész szám, melyik két tized, melyik két század közé esik!

K4 Ha egy 5 egység oldalú négyzet oldalait sorban 1 : 4 arányban osztjuk fel, akkor mekkora a belül keletkező négyzet oldala?

K5 Ha egy 5 egység oldalú négyzet oldalait sorban 2 : 3 arányban osztjuk fel, akkor mekkora a belül keletkező négyzet oldala?

K6 *a)* Ha egy 3 egység oldalú négyzet oldalait sorban 1 : 2 arányban osztjuk fel, akkor mekkora a belül keletkező négyzet oldala?

b) Ha egy 6 egység oldalú négyzet oldalait sorban 2 : 4 arányban osztjuk fel, akkor mekkora a belül keletkező négyzet oldala?

E7 Tudsz-e olyan négyzetet rajzolni az egységnégyzetekből álló rácson, amelynek a csúcsai rácspontokra esnek, és a területe $a = 13$; $b = 8$; $c = 10$; $d = 3$ területegység? Dolgozzatok csoportban! Beszéljétek meg az ötleteket!

A pi és más nem racionális számok

(Emelt szintű, választható tananyag)

Tanultunk már olyan számról, amelyet nem közönséges törtalakban adtunk meg.

Emlékszel?

Az r sugarú kör kerületét így számítjuk ki: $K = 2r\pi$. A kör kerületének és átmérőjének aránya minden kör esetén ugyanannyi. Ezt az arányszámot nevezzük π-nek. $\pi = 3{,}14159265\ldots$

A π-vel a kör kerületének meghatározásakor ismerkedtünk meg. Ezt a számot pontosan ismerjük, mert bármelyik számjegyét ki lehet számítani. Ennek ellenére nem tudjuk leírni. **A π irracionális szám.**

1. példa

Nézd meg, mit ír ki a számológéped π-re! Aztán nézd meg, mit ír ki $\frac{22}{7}$-re; $\frac{355}{113}$-ra! Hasonlítsd össze, hogy hányadik tizedesjegyen térnek el először a π-re kapott értéktől!

π-re például 3,141 592 654 adódik.

$\frac{22}{7}$-re például 3,142857143, de tudjuk, hogy ez a szám végtelen szakaszos: $3{,}\dot{1}42\,85\dot{7}$.

$\frac{355}{113} = 3{,}141\,592\,920\,353\,9\ldots$. Ez a tizedestört is végtelen szakaszos, bár a szakasza túl hosszú ahhoz, hogy kiszámítsuk.

A π azonban végtelen, nem szakaszos tizedestört.

$\pi = 3,1\,4\,1\,5\,9\,2\,6\,5\,3\ldots$	
$\frac{22}{7} = 3,1\,4\,\mathbf{2}\,8\,5\,7\,1\,4\,2\ldots$	Az első eltérés az ezredek helyiértékén van.
$\frac{355}{113} = 3,1\,4\,1\,5\,9\,2\,\mathbf{9}\,2\,0\ldots$	Az első eltérése a tízmilliomod helyiértéken van.

Ezeket a közelítéseket is használhatod. Ezek ugyanúgy közelítő értékei π-nek, mint a 3,14.

A 7 sugarú kör kerülete a három értékkel számolva:

$$2 \cdot 7 \cdot \pi \approx 2 \cdot 7 \cdot \frac{22}{7} = 44; \quad 7 \cdot 2 \cdot 3{,}14 = 43{,}96; \quad 7 \cdot 2 \cdot \pi = 43{,}982297150257\ldots.$$

A Föld sugara körülbelül 6500 km. Ha a Földet egy 6500 km sugarú gömbnek tekintjük, akkor az Egyenlítő hossza $2 \cdot 6500 \cdot \pi$ km $= 13\,000\pi$ km.

A három különböző közelítéssel a következő (kilométerre kerekített) értékeket kapjuk:

$$13\,000 \cdot \frac{22}{7} \approx 40\,857 \text{ km}; \quad 13\,000 \cdot 3{,}14 = 40\,820 \text{ km}; \quad 13\,000 \cdot \frac{355}{113} \approx 40\,841.$$

Megtudtuk, hogy a $\sqrt{2}$ és a π nem racionális szám. Van-e más irracionális szám?

Azt tanultuk, hogy a racionális számok véges vagy végtelen szakaszos tizedestörtalakba írhatók. Ezért ha olyan tizedestörtet találunk, amely nem véges, hanem végtelen, de nem szakaszos, akkor az irracionális szám.

2. példa

Vizsgáljuk meg, hogy a $0{,}1\underbrace{01}_{1}\underbrace{001}_{2}\underbrace{0001}_{3}\underbrace{00001}_{4}\underbrace{000001}_{5}\ldots$ szám racionális-e vagy sem!

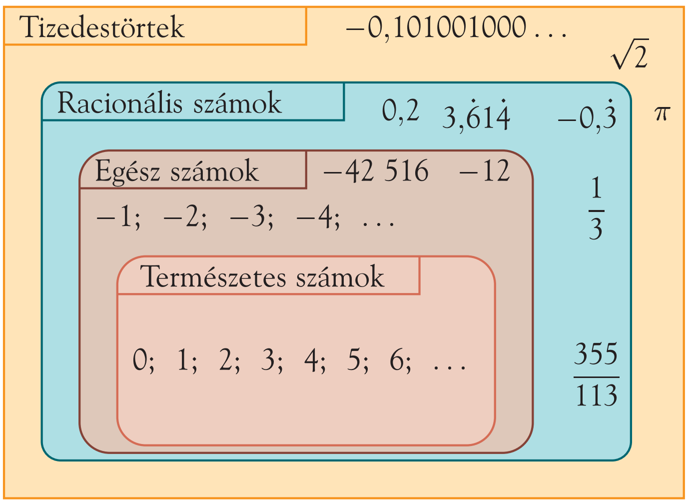
A 10-nek a hatványait (10, 100, 1000, ...) írtuk le egymás után a tizedesvessző mögé. Ez a szám nem lehet véges, mert minden 10 hatvány után következik 10 hatvány. Lehet-e szakaszos? De akkor mi lehet a szakasz? Mekkora lehet a szakasz hossza?

Ha valaki azt mondja, hogy például 23 a szakasz hossza, akkor a 10^{23} után minden 10 hatványban szerepel 23 darab egymást követő 0. Akkor a szakasz csupa 0-ból állna, de ez nem lehetséges, mert így valahonnan kezdve az összes tizedesjegy 0 lenne, pedig nem az. **Tehát ez a szám irracionális.**

Ilyen módszerrel nagyon sok nem szakaszos tizedestörtet lehet készíteni, de az így előállítható számoknál sokkal több az irracionális szám.

A racionális számok tizedestörtalakja lehet véges, lehet végtelen szakaszos.

A nem szakaszos végtelen tizedestörtek nem racionális számok.



Feladatok

A1 Racionális szám-e a $\sqrt{9}$?

A2 Racionális szám-e a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$?

K3 Válogasd szét az alábbi számokat aszerint, hogy racionális számok-e vagy sem!

$a = 1{,}6$; $b = 1{,}\dot{6}$; $c = 1{,}123456789101112131415161718\ldots$.

E4 *a)* Mondj olyan végtelen nem szakaszos tizedestörtet, amelyben a tizedek helyén 0 áll!

b) Mondj olyan végtelen nem szakaszos tizedestörtet, amelyben a tizedek és a századok helyén is 0 áll!

c) Mondj olyan végtelen nem szakaszos tizedestörtet, amelynek az első 10 tizedesjegye 0!

d) Mondj olyan végtelen nem szakaszos tizedestörtet, amelyben minden második jegy 0!

E5 Mit gondolsz, racionális számok-e ezek?

$a = \pi - \pi$; $b = 3{,}141\,592\,653\,589\,8$.

E6 Folytasd úgy a következő számokat, hogy racionális szám végtelen tizedestörtalakját kapd!

a) 1,0; *b)* 0,1; *c)* 3,14; *d)* 2,5.

E7 Folytasd úgy a következő számokat, hogy a kapott végtelen tizedestört ne legyen racionális szám!

a) 1,0; *b)* 0,1; *c)* 3,14; *d)* 2,5.

Kis számok

Emlékszel még, hogyan jelöltünk nagy számokat? Például tízmilliót így írtuk le:

$10\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^7$

Emlékszel még, minek neveztük ezt az alakot?

A hatványalakban azt a számot, amelyet hatványoztunk (többszöröztünk), alapnak neveztük. Azt a számot, ahányadik hatványra emeltük az alapot (ahányszoroztuk), kitevőnek neveztük. Például: 2^5 kifejezésben 2 az alap, 5 a kitevő.

kitevő

10^3

alap

hatványalak

10^7 azt jelenti, hogy a 10-et önmagával 7-szer szorozzuk össze:

	⋮	⋮		
	100 000	10^5		százezer
:10			−1	
	10 000	10^4		tízezer
:10			−1	
	1000	10^3		ezer
:10			−1	
	100	10^2		száz
:10			−1	
	10	10^1		tíz

Figyeld meg, hogyan változnak a számok a bal oldalon! Figyeld meg, hogyan változik a jobb oldalon a 10 kitevője!

Hogyan folytathatnánk ennek alapján a bal, illetve a jobb oldalon szereplő számokat?

A bal oldalon az egymást követő számokat úgy kapjuk, hogy 10-zel osztunk.

A jobb oldalon a 10 kitevőit sorban 1-gyel csökkentjük.

⋮	⋮	
1000	10^3	ezer
100	10^2	száz
10	10^1	tíz
1	10^0	egy
0,1	10^{-1}	tized
0,01	10^{-2}	század
0,001	10^{-3}	ezred
0,0001	10^{-4}	tízezred
0,00001	10^{-5}	százezred
⋮	⋮	

Jelölés

A 10-zel való osztás ugyanaz, mint a 0,1-del való szorzás. A 0,1-et így is jelölhetjük: 10^{-1}. Így olvassuk: 10 a (-1)-ediken.

$$1 : 10 = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10^{-1}.$$

A 100-zal osztás ugyanaz, mint a 0,01-dal való szorzás. A 0,01 jelölése: 10^{-2}, így olvassuk: 10 a (-2)-ediken.

$$1 : 100 = \frac{1}{100} = 0{,}01 = 10^{-2}.$$

A 10^3-nal való osztás a 10^{-3}-nal (10 a (-3)-adikonnal) való szorzást jelenti. Stb.

$$1 : 1000 = \frac{1}{1000} = 0{,}001 = 10^{-3}.$$

Észrevetted? $10^0 = 1$.

$$\ldots\ 1000 \xrightarrow{:10} 100 \xrightarrow{:10} 10 \xrightarrow{:10} 1 \xrightarrow{:10} 0{,}1 \xrightarrow{:10} 0{,}01 \xrightarrow{:10} \ldots$$

$$\ldots\ 10^3 \xrightarrow{:10} 10^2 \xrightarrow{:10} 10^1 \xrightarrow{:10} 10^0 \xrightarrow{:10} 10^{-1} \xrightarrow{:10} 10^{-2} \xrightarrow{:10} \ldots$$

$$\ldots\ 3 \xrightarrow{-1} 2 \xrightarrow{-1} 1 \xrightarrow{-1} 0 \xrightarrow{-1} -1 \xrightarrow{-1} -2 \xrightarrow{-1} \ldots$$

1. példa

A mikroszkopikus tömegek még milligrammban megadva is nagyon kicsiny – szinte kimondhatatlanul kicsi – számok. 1 kg = 1000 g = 1 000 000 mg. 1 mg = 0,000 001 kg.

Egy milligramm a gramm ezredrésze, a kilogramm milliomodrésze.

Egy elektron tömege körülbelül:

0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 kg =
= 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 911 g =
= 0,000 000 000 000 000 000 000 000 911 mg

Egy ilyen számot szinte képtelenség felolvasni. Ha mégis fel akarnánk olvasni, akkor mivel az utolsó számjegy (a második 1-es) az ezer kvadrilliomod (vagy kvadrilliárdomod) helyiértéken áll, így az 911 kvadrilliárdomod lehetne.

Ezt a számot leírni is, felolvasni is igen nehéz. (Próbáld meg lediktálni a padtársadnak!)

Törtalakban így is írhatjuk: $\dfrac{911}{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$.

A 911-et tehát elosztottuk 10^{27}-nel, vagy másképp 0,000 000 000 000 000 000 000 000 001-dal megszoroztuk. Ezt röviden 10^{-27}-nel jelöljük. Ezért ez a szám a $911 \cdot 10^{-27}$.

Feladatok

A1 Írd fel a megadott számokat 10 hatványaiként!

100;	10 000;	0,1;	10;	1;
0,01;	1000;	0,0001;	10 000;	0,001.

A2 Írd fel a következő 10 hatványokat a hatványalak használata nélkül!

10^{1};	10^{4};	10^{3};	10^{0};	10^{2};
10^{-1};	10^{-4};	10^{-3};	10^{-6};	10^{-2}.

K3 10-nek melyik hatványával szorzunk, amikor osztunk

10-zel;	100-zal;	1-gyel;	1000-rel;	10 000-rel?

K4 10 melyik hatványával osztunk, amikor szorzunk

10^{-2}-nel;	10^{-1}-nel;	10^{0}-nal;	10^{2}-nel;	10^{-3}-nal?

K5 Végezd el a szorzásokat! Mit tapasztalsz?

$10^{2}\cdot 10^{-2}$;	$10^{1}\cdot 10^{-1}$;	$10^{0}\cdot 10^{0}$;	$10^{4}\cdot 10^{-4}$;	$10^{3}\cdot 10^{-3}$.

K6 Hány tizedesjegye van a következő hatványoknak?

10^{-2};	10^{-4};	10^{-9};	10^{-1};	10^{-3}.

Egy szám többféle alakja – a normálalak

A nagyon nagy és a nagyon kicsi számok leírása hosszadalmas. Sokszor nem is tudjuk meghatározni egy-egy nagy vagy kicsi szám pontos értékét (csillagközi távolságok, atomi méretek). Akkor is fontos, hogy tudjuk, körülbelül hány jegyű, milyen *nagyságrendű* a szóbanforgó adat. Ilyen adatok lejegyzéséhez, a velük való számoláshoz nyújt segítséget a számok normálalakja.

1. példa

Egy számnak többféle alakját írtuk le. Írd be a hiányzó kitevőket!

$$
\begin{aligned}
& 0{,}000001946 \cdot 10^{\square} = \\
= \; & 0{,}00001946 \cdot 10^{\square} = \\
= \; & 0{,}0001946 \cdot 10^{\square} = \\
= \; & 0{,}001946 \cdot 10^{1} = \\
= \; & 0{,}01946 \cdot 10^{\square} = \\
= \; & 0{,}1946 \cdot 10^{\square} = \\
= \; & 1{,}946 \cdot 10^{\square} = \\
= \; & 19{,}46 \cdot 10^{\square} = \\
= \; & 194{,}6 \cdot 10^{\square} = \\
= \; & 1946 \cdot 10^{\square}
\end{aligned}
$$

Melyik az a sor, amelyben elhagyható a 10 hatvánnyal való szorzás?

Minden sorban egy számnak és 10 egy hatványának a szorzata szerepel. Az első tényezőt soronként mindig 10-zel szorozzuk. Ahhoz, hogy ne változzék a szorzat, a 10 hatványaként írt második tényezőt mindig 10-zel osztjuk, vagyis a 10 kitevőjében szereplő szám mindig 1-gyel csökken.

A kitevők sorban: 4; 3; 2; 1; 0; −1; −2; −3; −4; −5. A szám, amelyet felírtunk, a 0,019 46. A $0{,}019\,46 \cdot 10^0$ szorzatban tehát $10^0 = 10^1 : 10 = 1$-et jelöl.

Emlékszel?

Korábban a számoknak azt a felírását, amelyben egy 1 és 10 közé eső számot a 10 egy hatványával szorzunk, **normálalaknak** neveztük.

Mivel eddig 10-nek csak a **pozitív** hatványait használtuk, így csak a 10-nél nagyobb (vagy 10-zel egyenlő) számokat tudtuk normálalakba írni. Most megismertük 10 nem pozitív hatványait is.

Fontos tudnivaló

A számoknak azt a felírását, amelyben egy 1 és 10 közé eső számot a 10 egy hatványával szorzunk, **normálalaknak** nevezzük.

Például az elektronok tömegét kilogrammban adjuk meg, mert a kilogramm a tömeg SI mértékegysége. Eszerint az elektron tömege körülbelül $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kilogramm.

2. példa

Keresd meg, hogy az alábbi számok közül melyek egyenlőek az 12,54 számmal!

$a = 125{,}4 \cdot 10^{-1}$; $b = 12{,}54 \cdot 10^{0}$; $c = 12{,}54 \cdot 10^{1}$; $d = 0{,}1254 \cdot 10^{-2}$;

$e = 0{,}1254 \cdot 10^{3}$; $f = 12{,}54 \cdot 10^{-1}$; $g = 0{,}1254 \cdot 10^{2}$; $h = 125{,}4 \cdot 10^{0}$.

Ha elvégezzük a szorzásokat, akkor ezeket a számokat kapjuk:

$a = 12{,}54$; $b = 12{,}54$; $c = 125{,}4$; $d = 0{,}001\,254$;

$e = 125{,}4$; $f = 1{,}254$; $g = 12{,}54$; $h = 125{,}4$.

Eszerint a; b és g egyenlő 12,54-dal.

3. példa

Állítsuk nagyság szerint növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

$a = 151{,}42 \cdot 10^{12}$; $b = 151{,}42 \cdot 10^{-18}$; $c = 1{,}5142 \cdot 10^{14}$; $d = 15{,}142 \cdot 10^{-12}$;

$e = 15{,}142 \cdot 10^{13}$; $f = 15{,}142 \cdot 10^{-20}$; $g = 151{,}42 \cdot 10^{-23}$; $h = 1514{,}2 \cdot 10^{15}$;

$i = 1514{,}2 \cdot 10^{13}$; $j = 1{,}5142 \cdot 10^{27}$.

Ezeket a számokat ebben a felírásban nehéz összehasonlítani. Ahhoz pedig túl nagyok vagy túl kicsik, hogy beszorozzuk őket. Mindegyik az 1; 5; 1; 4; 2 számjegyekkel kezdődik, Írjuk át mindet normálalakra! Ne felejtsük el: ha a számot 10-zel osztjuk, a 10 kitevőjét 1-gyel növeljük; ha a számot 10-zel szorozzuk, a 10 kitevőjét 1-gyel csökkentjük. Így nem változik a szám és a 10 hatvány szorzata.

$a = 1{,}5142 \cdot 10^{14}$; $b = 1{,}5142 \cdot 10^{-16}$; $c = 1{,}5142 \cdot 10^{14}$; $d = 1{,}5142 \cdot 10^{-11}$;

$e = 1{,}5142 \cdot 10^{14}$; $f = 1{,}5142 \cdot 10^{-19}$; $g = 1{,}5142 \cdot 10^{-21}$; $h = 1{,}5142 \cdot 10^{18}$;

$i = 1{,}5142 \cdot 10^{16}$; $j = 1{,}5142 \cdot 10^{27}$.

A nagyság szerinti sorrend megállapításában segít, hogy 10 mely hatványával szoroztuk meg az 1,5142-edet. Eszerint: $g < f < b < d < a = c = e < i < h < j$.

4. példa

Fejezd ki a műveletek eredményét 10 hatványaiként!

$10^5 : 10^2$; $10^2 : 10^5$; $10^5 \cdot 10^{-2}$; $10^2 \cdot 10^{-5}$.

1.

$10^5 : 10^2 = 10^3$; $10^2 : 10^5 = 1 : 10^3 = 10^{-3}$, mert 2 darab 10-es szorzatát elosztjuk 5 darab 10-es szorzatával, vagyis 3 darab 10-es szorzatával osztunk.

$10^5 \cdot 10^{-2}$ jelentése: 5 darab 10-es szorzatát elosztjuk 2 darab 10-es szorzatával: $10^5 \cdot 10^{-2} = 10^3$.

$10^2 \cdot 10^{-5}$ jelentése: 2 darab 10-es szorzatát elosztjuk 5 darab 10-es szorzatával. $10^2 \cdot 10^{-5} = 10^{-3}$.

Észrevetted?

$10^5 \cdot 10^{-2} = 10^{5-2} = 10^3$; $10^2 \cdot 10^{-5} = 10^{2-5} = 10^{-3}$.

5. példa

Végezd el a következő műveleteket! Fejezd ki az eredményt normálalakban!

$6{,}3 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2 \cdot 10^5$; $(6{,}3 \cdot 10^3) : (4{,}2 \cdot 10^5)$.

A szorzásban szereplő tényezők sorrendje felcserélhető:

$$6{,}3 \cdot 10^3 \cdot 4{,}2 \cdot 10^5 = 6{,}3 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 10^5 = 26{,}46 \cdot 10^3 \cdot 10^5 = 26{,}46 \cdot 10^8 = 2{,}646 \cdot 10^9.$$

$$(6{,}3 \cdot 10^3) : (4{,}2 \cdot 10^5) = \frac{6{,}3 \cdot 10^3}{4{,}2 \cdot 10^5} = \frac{6{,}3}{4{,}2} \cdot \frac{10^3}{10^5} = 1{,}5 \cdot \frac{10^3}{10^5} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Fontos tudnivaló

A 0-nak nincs normálalakja. Nincs olyan 10 hatvány, amellyel a 0-t megszorozva 1 és 10 közé eső számot kapnánk.

Feladatok

A1 Végezd el a szorzásokat a következő normálalakban adott számokban!

a) $1{,}45 \cdot 10^2$;	*b)* $2{,}782 \cdot 10^0$;	*c)* $4{,}5187 \cdot 10^4$;	*d)* $9{,}9 \cdot 10^1$;
e) $3{,}14 \cdot 10^{-1}$;	*f)* $1{,}11 \cdot 10^3$;	*g)* $6{,}16 \cdot 10^{-4}$;	*h)* $1 \cdot 10^{-3}$;
i) $5{,}151 \cdot 10^{-2}$;	*j)* $1{,}001 \cdot 10^3$;	*k)* $1{,}001 \cdot 10^{-3}$;	*l)* $6{,}99 \cdot 10^{-1}$.

A2 Írd normálalakba a következő számokat!

a) 3,14;	*b)* 512;	*c)* 44,16;	*d)* 1;
e) 1000;	*f)* 500;	*g)* 243,2;	*h)* 48,1;
i) 0,103;	*j)* 0,001;	*k)* 0,052;	*l)* 0,0004.

A3 Az alábbiak közül mely számok normálalakja a $4{,}713 \cdot 10^{-2}$?

a) 4173;	*b)* $4173 \cdot 10^2$;	*c)* $4173 \cdot 10^{-3}$;	*d)* $4173 \cdot 10^{-4}$;
e) 0,4173;	*f)* $0{,}4173 \cdot 10^1$;	*g)* $0{,}4173 \cdot 10^{-1}$;	*h)* $0{,}4173 \cdot 10^{-2}$.

K4 Állítsd nagyság szerint növekvő sorrendbe a következő számokat!

$a = 25{,}4 \cdot 10^1$;	$b = 1{,}98 \cdot 10^2$;	$c = 1200 \cdot 10^{-1}$;	$d = 28\,793 \cdot 10^{-2}$;
$e = 246\,942 \cdot 10^{-3}$;	$f = 567 \cdot 10^2$;	$g = 0{,}1 \cdot 10^3$;	$h = 2469{,}42 \cdot 10^{-1}$.

Műveletek normálalakban adott számokkal

(Emelt szintű, választható tananyag)

1. példa

Végezd el az összeadásokat!

a) $5{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}8 \cdot 10^3$; *b)* $2{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}8 \cdot 10^{-1}$; *c)* $1{,}8 \cdot 10^{-12} + 2{,}7 \cdot 10^{-10}$.

a) $5{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}8 \cdot 10^3 = 5200 + 3800 = 9000 = 9 \cdot 10^3$.

Az is igaz, hogy $5{,}2 \cdot 10^3 + 3{,}8 \cdot 10^3 = (5{,}2 + 3{,}8) \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^3$.

b) $2{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}8 \cdot 10^{-1} = 28\,000 - 0{,}68 = 27\,999{,}32 = 2{,}799\,32 \cdot 10^4$.

Másrészt $2{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}8 \cdot 10^{-1} = 28\,000 \cdot 10^{-1} - 6{,}8 \cdot 10^{-1} = 27\,993{,}2 = 2{,}799\,32 \cdot 10^4$.

Vagy $2{,}8 \cdot 10^4 - 6{,}8 \cdot 10^{-1} = 2{,}8 \cdot 10^4 - 0{,}0068 \cdot 10^4 = 2{,}799\,32 \cdot 10^4$.

c) $1{,}8 \cdot 10^{-12} + 2{,}7 \cdot 10^{-10} = 0{,}018 \cdot 10^{-10} + 2{,}7 \cdot 10^{-10} = 2{,}718 \cdot 10^{-10}$.

Ahhoz, hogy két normálalakban felírt számot összeadjunk vagy kivonjunk egymásból, szükséges, hogy átírjuk őket olyan alakba, amelyben mindkettőt ugyanazzal 10-hatvánnyal szorozzuk.

2. példa

Egy fényév körülbelül $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km. A Galaxis átmérője $1{,}6 \cdot 10^5$ fényév.

Hány kilométer a Galaxis átmérője?

Ha egy fényév $9{,}46 \cdot 10^{12}$, akkor $1{,}6 \cdot 10^5$ fényév $1{,}6 \cdot 10^5 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12}$.

A szorzásban a tényezők felcserélhetők, ezért ez a szorzat így is felírható: $1{,}6 \cdot 9{,}46 \cdot 10^5 \cdot 10^{12}$.

A 10^5 azt jelenti, hogy 5 darab 10-es szorzata, a 10^{12} pedig azt, hogy 12 darab 10-es szorzata. E két szám szorzata 17 darab 10-es tényezőt tartalmaz. $1{,}6 \cdot 9{,}46 \cdot 10^5 \cdot 10^{12} = 1{,}6 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{17}$.

Mivel $1{,}6 \cdot 9{,}46 = 15{,}136$, a Galaxis átmérője $15{,}136 \cdot 10^{17}$ km, normálalakban $1{,}5136 \cdot 10^{18}$ km.

3. példa

A cseppkőbarlangokban a cseppkövek növekedése rendszerint azon múlik, hogy mennyire csapadékos a felszín. A különböző elhelyezkedésű barlangokban a cseppkövek növekedési sebességének aránya igen nagy (akár ezerszeres) is lehet.

Ha egy cseppkőbarlangban egy érintetlen cseppkő évente $5 \cdot 10^{-5}$ métert növekedett $1{,}2 \cdot 10^5$ éven keresztül, akkor most mekkora ez a cseppkő?

Egy év alatt $5 \cdot 10^{-5}$ méter növekedés $1{,}2 \cdot 10^5$ éven keresztül $5 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}2 \cdot 10^5$ méteres növekedést eredményez.

$5 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}2 \cdot 10^5 = 5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^5 \cdot 10^{-5}$.

A 10^{-5} a 10^5-nel való osztást jelenti. $10^5 \cdot 10^{-5} = \frac{10^5}{10^5} = 1$. Így a cseppkő mérete 6 m.

4. példa

Becslések szerint $1{,}5 \cdot 10^8$ évig éltek dinoszauruszok a Földön. A ma élő ember (Homo sapiens sapiens) becslések szerint $3{,}5 \cdot 10^4$ éve jelent meg. Hányszor annyi ideig léteztek élő dinoszauruszok, mint amennyi ideje az értelmes ember létezik?

A két kor hányadosa fejezi ki a keresett arányt: $\frac{1{,}5 \cdot 10^8}{3{,}5 \cdot 10^4}$. A kifejezést átírhatjuk $\frac{15 \cdot 10^7}{35 \cdot 10^3} = \frac{15}{35} \cdot \frac{10^7}{10^3}$ alakra. $\frac{15}{35} \approx 0{,}43$, $\frac{10^7}{10^3} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10^4$.

$0{,}43 \cdot 10^4$ normálalakban $4{,}3 \cdot 10^3$. Ez az arány kb. 4300, tehát a dinoszauroszok 4300-szor annyi ideig éltek, mint amennyi ideje az értelmes ember létezik.

Fontos tudnivaló

Ha azonos alapú hatványokat szorzunk össze, a kitevők összeadódnak:

$$10^5 \cdot 10^{12} = \underbrace{(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)}_{5\ \text{db}} \cdot \underbrace{(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)}_{12\ \text{db}} =$$

$$= 10^{5+12} = 10^{17}.$$

$$10^7 \cdot 10^{-2} = \frac{10^7}{10^2} = \frac{\overbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}^{7\ \text{db}}}{\underbrace{10 \cdot 10}_{2\ \text{db}}} = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{5\ \text{db}} = 10^5.$$

Ha azonos alapú hatványokat osztunk, a számláló kitevőjéből kivonjuk a nevező kitevőjét:

$$\frac{10^7}{10^3} = \frac{\overbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}^{7\ \text{db}}}{\underbrace{\cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}_{3\ \text{db}}} = 10^{7-3} = 10^4.$$

5. példa

A Föld térfogata egy körülbelül 10^4 km élhosszúságú kocka térfogatával egyenlő. Mekkora ez a térfogat?

Az a oldalú kocka térfogata $a \cdot a \cdot a$. Ezért a keresett térfogat $(10^4)^3$ km^3.

$(10^4)^3 = 10^4 \cdot 10^4 \cdot 10^4 = 10^{4+4+4} = 10^{4 \cdot 3} = 10^{12}$ (km^3).

6. példa

Mekkora a $4 \cdot 10^5$ m élhosszúságú kocka térfogata?

A $4 \cdot 10^5$ m élhosszúságú kocka térfogata:

$(4 \cdot 10^5)^3 = (4 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^5) \cdot (4 \cdot 10^5) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 10^5 \cdot 10^5 = 4^3 \cdot (10^5)^3$ (m^3).

Mivel 10^5 5 darab 10-es szorzata, ennek a köbe $10^5 \cdot 10^5 \cdot 10^5 = 10^{5+5+5} = 10^{5 \cdot 3} = 10^{15}$.

Vagyis a kocka térfogata $4^3 \cdot 10^{15}$ m$^3 = 64 \cdot 10^{15}$ m$^3 = 6{,}4 \cdot 10^{16}$ m^3.

Fontos tudnivaló

Egy hatványalakban írt szám valamely hatványa kiszámításakor a kitevők összeszorzódnak:

$$(10^4)^3 = (10^4)\cdot(10^4)\cdot(10^4) = \underbrace{(10\cdot 10\cdot 10\cdot 10)}_{4\text{ db}}\cdot\underbrace{(10\cdot 10\cdot 10\cdot 10)}_{4\text{ db}}\cdot\underbrace{(10\cdot 10\cdot 10\cdot 10)}_{4\text{ db}} = 10^{12}.$$

Egy szorzat hatványa a hatványok szorzata: $(4\cdot 5)^3 = 4^3\cdot 5^3$.

Feladatok

K1 Végezd el a műveleteket! Az eredményeket add meg normálalakban!

$a = (1{,}5\cdot 10^3)\cdot(2{,}2\cdot 10^2)$; $b = (2{,}1\cdot 10^1)\cdot(4{,}5\cdot 10^5)$; $c = (5{,}2\cdot 10^2)\cdot(2{,}5\cdot 10^4)$;

$d = (6{,}5\cdot 10^7)\cdot(4{,}2\cdot 10^4)$; $e = (2{,}5\cdot 10^7)\cdot(2{,}06\cdot 10^3)$; $f = (5{,}2\cdot 10^2)\cdot(2{,}5\cdot 10^4)$.

K2 Végezd el a műveleteket! Az eredményeket add meg normálalakban!

$a = (3\cdot 10)^4$; $b = (1{,}5\cdot 10)^2$; $c = (0{,}5\cdot 10)^3$;

$d = (4\cdot 10)^5$; $e = (1{,}7\cdot 10)^1$; $f = (6{,}2\cdot 10)^2$.

K3 Végezd el a műveleteket! Az eredményeket add meg normálalakban!

$a = (2\cdot 10^3)^6$; $b = (1{,}5\cdot 10^3)^4$; $c = (1{,}1\cdot 10^7)^3$;

$d = (2{,}5\cdot 10^6)^2$; $e = (0{,}5\cdot 10^2)^3$; $f = (5\cdot 10^3)^3$.

K4 Végezd el a műveleteket! Az eredményeket add meg normálalakban!

$a = \dfrac{5{,}4\cdot 10^8}{0{,}6\cdot 10^3}$; $b = \dfrac{1{,}5\cdot 10^3}{1{,}2\cdot 10^2}$; $c = \dfrac{7{,}5\cdot 10^6}{1{,}5\cdot 10^4}$;

$d = \dfrac{3{,}2\cdot 10^{12}}{1{,}6\cdot 10^{10}}$; $e = \dfrac{1{,}25\cdot 10^{18}}{0{,}5\cdot 10^{13}}$; $f = \dfrac{7{,}2\cdot 10^4}{8\cdot 10^3}$.

K5 Végezd el a szorzásokat!

$5{,}4\cdot 10^2\cdot 0{,}05\cdot 10^2$; $1{,}2\cdot 10^5\cdot 0{,}005\cdot 10^1$; $3{,}14\cdot 10^1\cdot 3{,}5\cdot 10^{-1}$;

$265\cdot 10^{-2}\cdot 15\cdot 10^5$; $4{,}4\cdot 10^3\cdot 5{,}5\cdot 10^{-4}$; $0{,}6\cdot 10^2\cdot 50{,}5\cdot 10^{-3}$;

$2{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 4{,}04\cdot 10^{-2}$; $2{,}56\cdot 10^{-4}\cdot 31{,}25\cdot 10^{-1}$; $0{,}0008\cdot 10^{-4}\cdot 1{,}25\cdot 10^7$.

K6 Hány elektronnyi tömeggel egyenlő a mákszem tömege, ha ez utóbbi körülbelül 10^{-6} kg?

E7 *a)* Egy mólnyi anyagban kb. $6\cdot 10^{23}$ db atom van. Egy mólnyi szén tömege 12 g. Hány g egy szénatom?

b) Egy mólnyi oxigén tömege 32 g. Hány gramm egy oxigénatom? (Az oxigén kétatomos gáz!)

c) Egy mólnyi hidrogén tömege 2 g. Hány gramm egy hidrogénatom? (A hidrogén kétatomos gáz!)

d) Egy vízmolekula két hidrogén- és egy oxigénatomból áll (H_2O). Hány gramm az oxigénmolekula?

e) Körülbelül hány molekula van 1 liter (1 kg) vízben?

E8 A Föld felszínének körülbelül egyharmad része szárazföld. Ez körülbelül 148 300 000 km^2. A Föld lakossága körülbelül 6 500 000 000 fő.

a) Írd fel a számokat normálalakban!

b) Hány ember jut egy négyzetkilométerre?

Azt az arányszámot, amely kifejezi, hogy átlagosan hány ember jut egy négyzetkilométernyi területre, *népsűrűségnek* nevezzük.

c) Nézz utána, hány négyzetkilométer Magyarország területe és hány fő a lakossága! Írd fel a számokat normálalakban, majd számítsd ki Magyarország népsűrűségét!

d) Nézz utána, hogy melyik Európa legsűrűbben, illetve legritkábban lakott országa!

K9 A tojás egyetlen sejt. A strucctojás a legnagyobb sejt. Az egyik kolibrifajé a legkisebb tojás, tömege kb. 0,4 gramm. Ennek akár $6 \cdot 10^3$-szorosa is lehet a strucctojás tömege.

Ezek szerint hány kilogramm lehet egy ilyen strucctojás?

E10 Egy CD tárkapacitása 640 MB (megabyte, ejtsd: megabájt), ez körülbelül $6{,}4 \cdot 10^8$ byte. Hány CD-re lehet lementeni a 40 GB tárkapacitású merevlemez tartalmát, ha 40%-án van adat. (GB: gigabyte, ejtsd: gigabájt. 1 GB körülbelül 10^9 byte.)

Számelmélet

A matematikának azt az ágát, amely az oszthatósággal, oszthatósági szabályokkal foglalkozik, számelméletnek nevezik. Idézzük fel a korábbi években tanultakat!

A **természetes számok** körében beszéltünk az oszthatóságról. (Az egész számok körében is lehet oszthatóságról beszélni.)

Ha egy természetes számot megszorzunk egy természetes számmal, akkor a szám egy többszörösét kapjuk. Minden természetes szám osztója a saját többszöröseinek.

Fontos tudnivaló

osztója $\xrightarrow{\text{szorozva egy természetes számmal}}$ a természetes szám $\xrightarrow{\text{szorozva egy természetes számmal}}$ többszöröse

osztója $\xrightarrow{\text{szorozva egy egész számmal}}$ az egész szám $\xrightarrow{\text{szorozva egy egész számmal}}$ többszöröse

1. példa

Melyek oszthatók az alábbi számok közül 1-gyel, 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 9-cel, 10-zel?
1; 5; 6; 10; 15; 24; 28; 30; 36; 48; 72; 81; 84; 96. Írd táblázatba!

osztható	1-gyel	2-vel	3-mal	4-gyel	5-tel	6-tal	9-cel	10-zel
1	igen	–	–	–	–	–	–	–
5	igen	–	–	–	igen	–	–	–
6	igen	igen	igen	–	–	igen	–	–
10	igen	igen	–	–	igen	–	–	igen
15	igen	–	igen	–	igen	–	–	–
24	igen	igen	igen	igen	–	igen	–	–
28	igen	igen	–	igen	–	–	–	–
30	igen	igen	igen	–	igen	igen	–	igen
36	igen	igen	igen	igen	–	igen	igen	–
48	igen	igen	igen	igen	–	igen	–	–
72	igen	igen	igen	igen	–	igen	igen	–
81	igen	–	igen	–	–	–	igen	–
84	igen	–	igen	igen	–	igen	–	–
96	igen	igen	igen	igen	–	igen	–	–

Például: az 5 osztója a 30-nak, mert $5 \cdot 6 = 30$. Így jelöljük: $5 \mid 30$.

A 9 osztója a 72-nek, vagyis $9 \mid 72$, mert $9 \cdot 8 = 72$.

1-gyel és önmagával minden természetes szám osztható.

Azok az 1-nél nagyobb egész számok, amelyeknek e kettőn kívül nincs is más osztója, **prímszámok.** Például: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23 stb.

A többi 1-nél nagyobb számot **összetett** számnak nevezzük. Például: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14 stb.

Minden 1-nél nagyobb természetes számot fel tudunk írni prímszámok szorzataként, és egy szám lehetséges felírásai csak a tényezők sorrendjében térhetnek el. Például a 24-et felírhatjuk $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ vagy $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2$ vagy $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ vagy $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ alakban, de más prímtényezők szorzataként nem.

2. példa

Írjuk fel a 96 prímtényezős felbontását!

Bontsuk osztópárok szorzatára a 96-ot, majd a kapott tényezőket is, amíg csak lehet!
$96 = 2 \cdot 48 = 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Ezt $2^5 \cdot 3$ alakban is írhatjuk.

Két szám közös osztói azok a számok, amelyek mind a két számnak osztói. Például 75-nek és 60-nak közös osztói az 1, a 3, az 5 és a 15.

Ez a prímtényezős felírásukból is leolvasható: $75 = 3 \cdot 5^2$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Közös prímtényezők a 3 és az 5. Ezekből és az 1-ből – amely minden számnak osztója – a következő közös osztók állíthatók elő: 1; 3; 5; $3 \cdot 5 = 15$.

Két szám legnagyobb közös osztója a közös osztók közül a legnagyobb. Például 75-nek és 60-nak a legnagyobb közös osztója a 15. $(75; 60) = 15$.

Két szám közös többszörösei azok a számok, amelyek mindkét számnak többszörösei. Például a 12 és a 10 közös többszörösei a 0, 60, 120, 180, 240 stb.

Két szám legkisebb közös többszöröse a legkisebb pozitív közös többszörösük. Például a 12 és a 10 legkisebb közös többszöröse a 60. $[12; 10] = 60$.

3. példa

Határozzuk meg a következő számokat! $(3; 10)$; $[3; 10]$; $(2; 10)$; $[2; 10]$; $(4; 6)$; $[4; 6]$.

Írjuk fel először az adott számok prímtényezős felbontását! 3; $10 = 2 \cdot 5$; $4 = 2 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$.

$(3; 10) = 1$; $[3; 10] = 30$; $(2; 10) = 2$; $[2; 10] = 10$; $(4; 6) = 2$; $[4; 6] = 12$.

Fontos tudnivaló

Soroljuk fel, milyen oszthatósági szabályokkal ismerkedtünk meg az előző években! Az oszthatósági szabályok a számok 10-es számrendszerben felírt alakjára, illetve a prímtényezős felbontásukra vonatkoznak.

Egy szám osztható	A 10-es számrendszerben felírt alakról tudjuk:	A prímtényezős felbontásról tudjuk:
2-vel, ha	a felírásában az egyesek helyén páros számjegy áll;	a prímtényezős felbontásában szerepel a 2.
3-mal, ha	a felírásában a számjegyei összege osztható 3-mal;	a prímtényezős felbontásában szerepel a 3.
4-gyel, ha	a felírásában az utolsó két helyiértéken álló kétjegyű szám osztható 4-gyel;	a prímtényezős felbontásában legalább kétszer szerepel a 2.
5-tel, ha	a felírása 5-re vagy 0-ra végződik;	szerepel benne az 5.
6-tal, ha	páros szám, és a felírásában a számjegyei összege osztható 3-mal;	a prímtényezős felbontásában szerepel a 2 és a 3.
8-cal, ha	a felírásában az utolsó három helyiértéken álló háromjegyű szám osztható 8-cal;	a prímtényezős felbontásában legalább háromszor szerepel a 2.
9-cel, ha	a felírásában a számjegyei összege osztható 9-cel;	a prímtényezős felbontásában legalább kétszer szerepel a 3.
10-zel, ha	a felírása 0-ra végződik;	a prímtényezős felbontásában szerepel a 2 és az 5.
25-tel, ha	a felírásában az utolsó két helyiértéken álló kétjegyű szám osztható 25-tel;	a prímtényezős felbontásában legalább kétszer szerepel az 5.
100-zal, ha	a felírása 00-ra végződik;	a prímtényezős felbontásában legalább kétszer szerepel a 2 is és az 5 is.

Egy szám akkor és csak akkor osztható 10-zel, ha osztható 2-vel is és 5-tel is.

Egy szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel is és 3-mal is.

Egy szám akkor és csak akkor osztható 20-szal, ha osztható 4-gyel is és 5-tel is.

Feladatok

A1 Határozd meg a következő számok prímtényezős alakját! Ha valamelyik szám felírásában több egyenlő prímtényező is szerepel, akkor ezek felírásához használj hatványalakot!

$a = 4$; $b = 10$; $c = 12$; $d = 18$; $e = 20$; $f = 24$;

$g = 25$; $h = 30$; $i = 32$; $j = 40$; $k = 42$; $l = 45$;
$m = 50$; $n = 51$; $p = 54$; $q = 60$; $r = 63$; $s = 64$;
$t = 70$; $u = 72$; $v = 74$; $x = 75$; $y = 80$; $z = 81$.

K2 Add meg a következő számok legkisebb közös többszöröseit!

$a = 10$ és $b = 16$; $a = 12$ és $b = 18$; $a = 12$ és $b = 20$;
$a = 15$ és $b = 16$; $a = 21$ és $b = 18$; $a = 24$ és $b = 20$;
$a = 25$ és $b = 24$; $a = 25$ és $b = 30$; $a = 25$ és $b = 36$.

K3 Add meg a következő számok legnagyobb közös osztóját!

$a = 10$ és $b = 16$; $a = 12$ és $b = 18$; $a = 12$ és $b = 20$;
$a = 150$ és $b = 160$; $a = 210$ és $b = 186$; $a = 244$ és $b = 20$;
$a = 1250$ és $b = 96$; $a = 1250$ és $b = 120$; $a = 1250$ és $b = 108$.

K4 Mely prímtényezőkkel kell megszorozni a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ számot ahhoz, hogy a kapott szám osztható legyen

a) 4-gyel; *b)* 12-vel; *c)* 9-cel; *d)* 100-zal; *e)* 8-cal; *f)* 18-cal?

K5 Mely prímtényezőkkel kell megszorozni a $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ számot ahhoz, hogy osztható legyen

a) 5-tel; *b)* 15-tel; *c)* 9-cel; *d)* 10-zel; *e)* 11-gyel; *f)* 18-cal?

K6 Keresd meg, hogy az alábbi számok közül melyeknek többszöröse a 84!

a) 14; *b)* 4; *c)* 15; *d)* 7; *e)* 12; *f)* 6;
g) 16; *h)* 24; *i)* 3; *j)* 8; *k)* 21; *l)* 42.

E7 *a)* Tudsz-e olyan természetes számot mondani, amely minden természetes számnak osztója?

b) Tudsz-e olyan természetes számot mondani, amely minden természetes számnak többszöröse?

Vitassátok meg a kapott eredményeket!

E8 *a)* Tudsz-e olyan egész számot mondani, amely minden egész számnak osztója?

b) Tudsz-e olyan egész számot mondani, amely minden egész számnak többszöröse?

Vitassátok meg a kapott eredményeket!

K9 Készíts halmazábrát! Az alaphalmaz a 0 és a 40 közé eső természetes számok halmaza (beleértve a 0-t és a 40-et is). Legyen $A = \{4 \text{ többszörösei}\}$; $B = \{5 \text{ többszörösei}\}$!

a) Írd be az alaphalmaz elemeit a halmazábrába!

b) Írd le az A és a B halmaz közös elemeit!

c) Fogalmazd meg, hogy milyen oszthatósági tulajdonság teljesül A és B közös elemeire!

K10 Készíts halmazábrát! Az alaphalmaz a 0 és a 40 közé eső természetes számok halmaza (beleértve a 0-t és a 40-et is). Legyen $A = \{4 \text{ többszörösei}\}$; $B = \{6 \text{ többszörösei}\}$!

a) Írd be az alaphalmaz elemeit a halmazábrába!

b) Írd le az A és a B halmaz közös elemeit!

c) Fogalmazd meg, hogy milyen oszthatósági tulajdonság teljesül A és B közös elemeire!