I. Kombinatorika

I

Bevezető feladatok

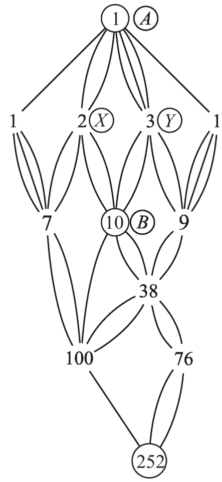
1. *a)* $3 \cdot 5 = 15$; *b)* $1 \cdot 2 = 2$.
2. $6 \cdot 6 = 36$.
3. $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 24$.
4. $4 \cdot 4 = 16$. A „felső ág” és az „alsó ág” 4-4 csapata közül bármelyik játszhatja a döntőt.
5. $20 \cdot 20 = 400$. Mindkét fél 16 gyalog- és 4 huszárlépés közül választhat.
6. $6 \cdot 10 = 60$. Az e egyenes bármely 6 pontját az f egyenes bármely 10 pontjával összeköthetjük.
7. *a)* A legtöbb játszmát 10-10 játékos esetén kapjuk, a mérkőzések száma ekkor $10 \cdot 10 = 100$.
b) Ha a játékosok száma $n = 2k$, a maximális számú mérkőzést akkor kapjuk, ha egyforma létszámú csoportokat hozunk létre. Ekkor k^2 számú játszma lesz, míg ha a csoportok létszáma $k + d$, illetve $k - d$ (ahol $d \in \mathbf{Z}^+$), a játszmák száma kevesebb lesz: $(k + d)(k - d) = k^2 - d^2$.
Ha a játékosok száma $n = 2k + 1$, a legtöbb mérkőzést akkor kapjuk, ha k, illetve $k + 1$ a csoportok létszáma. Ekkor $k^2 + k$ számú játszma lesz, míg ha a csoportok létszáma $k + 1 + d$, illetve $k - d$ (ahol $d \in \mathbf{Z}^+$), a játszmák száma kevesebb lesz: $(k + 1 + d)(k - d) = k^2 + k - d^2 - d$.
8. *a)* Az $1 + 1 + 3$ és $1 + 2 + 2$ összegek egyaránt 3-féleképpen állhatnak elő, ez összesen 6 lehetőség.
b) A 3-as összeg 1-féleképpen $(1 + 1 + 1)$, a 4-es összeg 3-féleképpen $(1 + 1 + 2)$, az 5-ös összeg pedig az *a)* feladat alapján 6-féleképpen állhat elő. Összesen $1 + 3 + 6 = 10$ lehetőség.
9. Ha az utolsó (legkisebb) helyiértéken álló számjegy 5, akkor $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$-féle szám készíthető, mert 0-val nem kezdődhet a szám. Ha az utolsó helyiértéken álló számjegy 0, akkor $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féle szám lehetséges. Összesen $96 + 120 = 216$ lehetőség van.
10. *a)* *I. ábra:* Az A-ból C-be vezető utak száma $\overline{AC} = 3 \cdot 4 + 1 + 2 = 15$.
II. ábra: Induljunk el az A pontból, s minden elágazásnál írjuk a csomópontra az A-ból odavezető utak számát (10/2. ábra)!
Észrevehetjük, hogy az út során bármely X elágazáshoz vagy felülről, vagy balról érkezhetünk, ezért az X csomópontra írt szám megegyezik a tőle balra, illetve felette lévő csomópontra írt számok összegével. $\overline{AC} = 84$.
III. ábra: Hasonló okoskodással $\overline{AC} = 252$. Bármely elágazáshoz felülről érkezünk, de onnan több út is lehetséges. Pl. B-be X-ből vagy Y-ból 2 úton juthatunk el (10/3. ábra). X-be 2, Y-ba 3 út vezetett, ezért a B-be vezető utak száma $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10$.

10/2.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\
1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 5 & - & 6 & - & 7 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\
1 & - & 3 & - & 6 & - & 10 & - & 15 & - & 21 & - & 28 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | & & | \\
1 & - & 4 & - & 10 & - & 20 & - & 35 & - & 56 & - & 84
\end{array}$$

I

10/3.



b) *I. ábra:* $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{ABC} = 3 \cdot 4 = 12$.
II. ábra: $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{ABC} = 10 \cdot 4 = 40$.
III. ábra: $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 13$, $\overline{ABC} = 10 \cdot 13 = 130$.

c) Az összes út számából ki kell vonni a B-n áthaladó utak számát. *I. ábra:* $\overline{AC} - \overline{ABC} = 15 - 12 = 3$. *II. ábra:* $\overline{AC} - \overline{ABC} = 84 - 40 = 44$. *III. ábra:* $\overline{AC} - \overline{ABC} = 252 - 130 = 122$.

11. Összesen 9 darab egyjegyű, 90 darab kétjegyű, 900 darab háromjegyű és 1005 darab négyjegyű számot írtunk le. $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1005 \cdot 4 = 6909$.

12. Kötetenként $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 464 \cdot 3$, $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 453 \cdot 3$, illetve $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 482 \cdot 3$, összesen $1581 + 1548 + 1635 = 4764$ számjegyet írtunk le.

13. $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + n \cdot 3 = 2184$, innen $n = 665$. Ennyi oldalból áll a munka.

14. *a)* A szám $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 2893$ jegyű.
b) Az 1-es számjegyet 001-től 999-ig minden helyiértéken 100-szor írtuk le, összesen 300-szor. Hasonló a helyzet a 2, 3, … , 9 számjegyekkel.
A 0-t az egyes helyiértéken 99-szer, a tízes helyiértéken 90-szer, összesen 189-szer írtuk le. Maradt még az 1000, így összesen: az 1-es számjegyet 301-szer; a 2, 3, … , 9 számjegyeket 300-szor; a 0-t 192-szer írtuk le.
c) $9 \cdot 1 + 45 \cdot 2 = 99$, a 100. számjegy 5-ös.

15. A tükrös helyzetű színezett mezőket párosíthatjuk. Mivel páratlan számú színezett mező van, a középső mezőt kiszíneztük. Általánosan is igaz marad az állítás, ha a tábla két oldalhosszának mérete és a bábuk száma páratlan.

16. *a)* 10.
b) 10. Minden 2 elemű részhalmazhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetjük a 3 elemű komplementer részhalmazát.

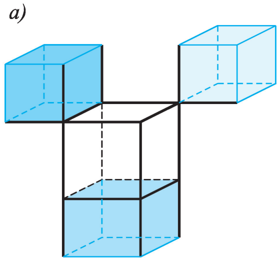
17. A kezdő játékos nyerhet. Kezdetben az érméjét az asztal középpontjára helyezi, majd minden lépésben az ellenfél érméjére középpontosan tükrösen helyezi el sajátját.

18. A kezdő játékos nyerhet. Kezdetben a két középső korongot fordítja meg, majd minden lépésben az ellenfél által megfordított korongokra szimmetrikus helyzetű korongokat fordítja meg.
Ha kezdetben a korongok egy körben helyezkednek el, akkor a kezdő játékos lépése után 9 vagy 8 hosszú sor marad. A második játékos 1 vagy 2 középső korong megfordításával előállíthatja a szimmetrikus helyzetet, tehát neki van nyerő stratégiája.

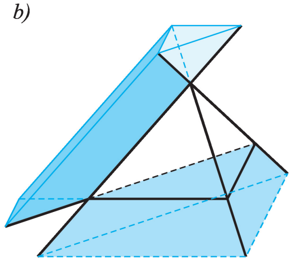
19. A testek minden lapjához, éléhez és csúcsához „kívülről” egy-egy térrészt rendelhetünk, s maga a test is egy térrészt határoz meg.
a) $6 + 12 + 8 + 1 = 27$; *b)* $4 + 6 + 4 + 1 = 15$.

19.

a)



b)



20. Minden 4-lyukú buszjegyhez kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetjük az 5-lyukú „komplementer” buszjegyet, tehát mindkét fajtából ugyanannyi buszjegy van.

21. *a)* A reformlottó minden sorsolásához (90 számból 85 darab) kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhetjük a hagyományos lottó egy sorsolását (90 számból a kimaradt 5 darab). A telitalálat elérése egyformán nehéz.

b) Mindenkinek van legalább 80 találata.

22. *a)* 15.

b) Minden kiválasztott négyszög párosítható a ki nem választott két csúcson áthaladó egyenessel, ezért ugyanannyi négyszög választható ki a csúcsokból, mint az *a)* feladatbeli egyenesek száma: 15 darab.

c) Maximális számú metszéspontot akkor kaphatunk, ha semelyik két átló metszéspontján nem megy át harmadik átló. Ekkor négy csúcs egyértelműen meghatározza két átló metszéspontját, tehát ugyannyi metszéspontot kapunk, mint a *b)* esetben: 15 darabot.

23. Jelölje A a 3-mal, B az 5-tel osztható, 2000-nél nem nagyobb pozitív páros számok halmazát!

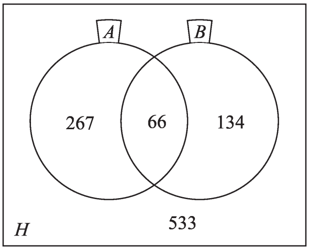
a) 3-mal osztható szám 333 darab van, ezért $|A| = 333$.

b) $|B| = 200$.

c) Ha egy egész szám osztható 3-mal és 5-tel, akkor osztható 15-tel is. 15-tel osztható szám 66 darab van, ezért $|A \cap B| = 66$.

d) Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s írjuk be az egyes tartományok elemszámát „belülről kifelé” haladva (vagyis az $A \cap B$ tartománnyal kezdve)!

23.



Az ábra alapján 3-mal vagy 5-tel 467 szám osztható.

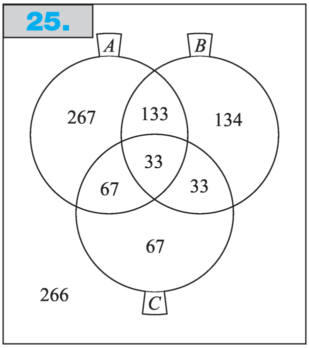
e) 533.

Más megoldási lehetőség a *d)* feladatra:
$|A \cup B|$ a kérdés. A szitaformulát alkalmazva $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 500 + 333 - 166 = 667$. (A 2-vel és 3-mal osztható számokat kétszer számoltuk, ezért egyszer le kell vonni őket.)

24. Mivel 60% + 65% = 125%, mindkét feladatot a versenyzők 25%-a oldotta meg. Csak a második feladatot a versenyzők 65% − 25% = 40%-a, s mivel ez 80 fő, 200-an indultak a versenyen. Az iskola tanulóinak létszáma 1000.

25. Jelölje A, B, C rendre a T_2, T_3, T_5 tulajdonságú számok halmazát! Ekkor $|A| = 500$, $|B| = 333$, $|C| = 200$, $|A \cap B| = 166$, $|A \cap C| = 100$, $|B \cap C| = 66$, $|A \cap B \cap C| = 33$.
Szemléltessük a halmazokat Venn-diagrammal, s írjuk be az egyes tartományok elemszámát „belülről kifelé” haladva (vagyis az $A \cap B \cap C$ tartománnyal kezdve)!

25.



Ez alapján: *a)* 33; *b)* 266; *c)* 267 + 134 + 67 = 468; *d)* 133 + 67 + 33 = 233.

I

Másik megoldási lehetőség a szitaformula alkalmazása.

a) $|A \cap B \cap C| = 33.$

b) $|\overline{(A \cup B \cup C)}|$ a kérdés. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$, ezért $|\overline{(A \cup B \cup C)}| = 1000 - 734 = 266.$

c) $|A| + |B| + |C| - 2 \cdot (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + 3 \cdot |A \cap B \cap C| = 500 + 333 + 200 - 2 \cdot (166 + 100 + 66) + 3 \cdot 33 = 468.$

d) $|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3 \cdot |A \cap B \cap C| = 166 + 100 + 66 - 3 \cdot 33 = 233.$

26. *a)* $20 + 7 + 1 = 28$;
b) $7 + 1 = 8$;
c) $7 + 20 + 1 = 28$;
d) $20 + 7 + 1 + 1 = 29$;
e) $7 + 20 + 2 = 29$;
f) $10 + 7 + 1 = 18$ (amikor van piros, de nincs zöld golyó a kihúzottak között: $10 + 7$ lehetőség);
g) $20 + 7 + 1 = 28$;
h) 1 (2 golyó esetén előfordulhat, hogy van két piros, de nincs három zöld; ez nyilván nem áll fenn 1 kihúzott golyó esetén);
i) $1 + 2 + 3 + 1 = 7$;
j) $10 + 20 + 3 + 1 = 34$;
k) $7 + 20 + 1 = 28$;
l) $7 + 20 + 1 = 28$.

27. *a)* 19;
b) 46;
c) 1 (2 zokni esetén előfordulhat, hogy van piros pár, de nincs zöld pár; ez nyilván nem áll fenn 1 kihúzott zokni esetén);
d) 16;
e) 58;
f) 1 (2 zokni esetén előfordulhat, hogy nincs piros pár, de van zöld pár; ez nyilván nem áll fenn 1 kihúzott zokni esetén).

28. Nem lehetséges. A három sor, három oszlop és a két átló számainak összege 8 értéket ad, míg az általuk meghatározott három szám összege -3-tól $+3$-ig 7-féle lehet, tehát vannak közöttük egyenlők.

29. A táblát átlója mentén felbonthatjuk három darab 668×333-as méretű résztáblára. Legyen pl. a 668 a vízszintes és 333 a függőleges méret; ekkor az átló a mezőket határoló egységnyi hosszú szakaszokból 667 függőlegest és 332 vízszintest metsz. (Nem tekintjük metszésnek, ha az átlónak a szakasz végpontjával van közös pontja.) A metszéspontok számánál eggyel több mezőn halad át az átló, így összesen $3 \cdot (667 + 332 + 1) = 3000$ azon mezők száma, amelyek belsejében áthalad az átló.

30. *a)* Az átló egyenesét kissé eltoljuk pl. „jobbra” úgy, hogy ne menjen át egyetlen mező csúcsán sem. Ekkor az utolsó kivételével minden sorban két mezőt metsz, összesen 15-öt.

Több mezőt nem metszhet semmilyen egyenes. Ugyanis bármely egyenes a mezőket határoló egységnyi hosszú vízszintes és függőleges szakaszokból összesen legfeljebb 16-ot metszhet (a tábla széleit is beleértve), s a metszéspontok számánál eggyel kevesebb mezőn haladhat át.

b) Hasonló okoskodással a kissé elmozgatott átló egyenese legfeljebb $2n-1$ számú mezőn haladhat át.

31. A testátló az egységkockákat határoló síkokat az egyes irányokban 10, 11, illetve 12 pontban döfi. Minden metszésponthoz rendelhetünk egy egységkockát (pl. azt, amelyiket a testátló „elhagyja" a metszéspontnál), valamint még az utolsó kis kockát is számolnunk kell. Összesen $10 + 11 + 12 + 1 = 34$ egységkockán halad át a téglatest testátlója.

32. *a)* 2 007 206. $1 + 2 + 3 + \ldots + 2003 = \dfrac{2003 \cdot 2004}{2} = 2\,007\,006$. Ennyi szám található az első 2003 sorban, ezért a 2004. sor $2\,007\,006 + 101 = 2\,007\,107$-tel kezdődik. A sorban lévő 100. szám a $2\,007\,107 + 99 = 2\,007\,206$.

b) Ha a 2005 az n. sorban van, akkor $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + 100 < 2005$.
$\dfrac{(n-1) \cdot n}{2} + 100 < 2005$, innen $n \le 62$, vagyis a 2005 a 62. sorban van.
Az első 61 sorban $\dfrac{61 \cdot 62}{2} = 1891$ szám van, így a 62. sor első eleme $1891 + 101 = 1992$, 14. eleme a 2005.

33. *a)* Az 1. esetben $10 + 5 + 2 + 1 + 1 = 19$, a 2. esetben szintén 19 a mérkőzések száma.

b) Minden mérkőzés vesztese kiesik, s így az egyetlen győztes személyének megállapításához 19 kiesésre (mérkőzésre) van szükség.
Általában n játékos esetén $n-1$ mérkőzéssel lehet megállapítani a győztest.

34. *a)* Minden egyes vágással +1-gyel nő az összes papírdarab száma. A végállapotban 56 darab van, így 55 vágás szükséges.

b) Ha a már meglévő papírdarabokat pl. egymásra tehetjük, akkor minden egyes vágással legfeljebb megkétszerezhetjük a számukat. A végállapotban 56 darab van. $2^5 < 56 < 2^6$, így legalább 6 vágás kell. A felezéses technikát alkalmazva ennyi vágás elegendő is, nem nehéz a konkrét darabolást megadni. (Arra kell csak ügyelni, hogy a vágások előtt a darabokat egymásra vagy alkalmasan egymás mellé pakoljuk.)

35. *a)* Minden egyes vágással +1-gyel nő az összes darab száma. A végállapotban 512 darab kis kocka keletkezett, így 511 vágás szükséges.

b) Ha a már meglévő téglatest darabokat pl. egymásra tehetjük, akkor minden egyes vágással legfeljebb megkétszerezhetjük a darabok számát. A végállapotban 512 darab kis kocka van. $512 = 2^9$, így legalább 9 vágás kell. 9 vágással a darabolás meg is valósítható. A kockalapokra merőleges három irány mindegyikében elegendő 3 vágás, ha a felezéses technikát alkalmazzuk.

36. *a)* A felezéses technika segítségével 4 kérdésből ki lehet találni a gondolt számot. Ha pl. az első kérdés az, hogy „A gondolt szám legfeljebb 8?”, akkor a válasz után már csak 8 szám közül kell kitalálni Anna számát. Ugyanígy felezve a lehetőségeket, a következő kérdés után 4, majd 2, végül 1 lehetőség marad. Ez a legjobb kérdezési technika. Ha ugyanis valamelyik kérdéssel nem egyenlő arányban osztanánk két részre a lehetséges számokat, „balszerencsés” válasz esetén a nagyobbik halmazba kerülne a gondolt szám, s ezzel a halmazzal kellene folytatnunk a kérdezést.

b) Az alábbi táblázat mutatja, hogy 4 kérdés most is elegendő.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
I.	x	x	x	x	x	x	x	x								
II.	x	x	x	x					x	x	x	x				
III.	x	x			x	x			x	x			x	x		
IV.	x		x		x		x		x		x		x		x	

A kérdéseket I–IV. jelöli. Minden kérdéssel az 1–16 számok egy részhalmazára kérdezünk rá. Az egyes kérdéseknél x jelet tettünk annak a számnak az oszlopába, amelyik az éppen kérdezett halmazba beletartozik. Látható, hogy a 16 különböző válaszlehetőségnek megfelelően a 16 oszlop különbözik egymástól.

37. *a)* Két mérés elegendő. Jelöljük a golyókat (1), (2), (3), (4), (5), (p)-vel, s az első méréssel hasonlítsuk össze (1) és (2) tömegét (3) és (p) tömegével! Három eset lehetséges:

1. (1) és (2) nehezebb, mint (3) és (p) (jelölés: $\underline{(1)(2)} > \underline{(3)(p)}$). Ekkor (1) vagy (2) lehet nehezebb a többi fehér golyónál, vagy (3) lehet könnyebb. Ennek eldöntésére elég (1)-et és (2)-t összehasonlítani, összesen tehát két mérés elegendő.
2. $\underline{(1)(2)} < \underline{(3)(p)}$. A megoldás hasonló az előbbihez.
3. $\underline{(1)(2)} = \underline{(3)(p)}$. A hamis golyó (4) vagy (5) lehet, kiválasztására elég pl. (1)-et és (4)-et összehasonlítani.

b) Két mérésből nem mindig tudjuk megmondani, hogy a hamis golyó könnyebb, vagy nehezebb a többinél. Az előző megoldás 3. esetében ha (1) = (4), akkor nem tudjuk megállapítani, hogy a hamis (5) „hogyan” hamis.

Más mérési eljárás sem lehet eredményes. Összesen 10 lehetőségünk van (5 golyó mindegyike lehet könnyebb, vagy nehezebb, mint a többi), egy mérés kimenetele 3-féle lehet, tehát 2 méréssel csak $3 \cdot 3 = 9$ esetet tudunk megkülönböztetni.

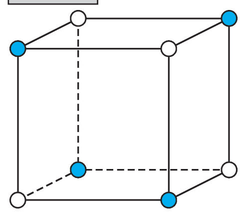
38. Következtessünk a végállapotból visszafelé! A $2^{45} \to 2^{44} \to 2^{22} \to 2^{11} \to 2^{10} \to \to 2^{5} \to 2^{4} \to 2^{2} \to 2^{1} \to 1$ lánc 9 lépés hosszú, ezért kezdetben az $1 \to 1$ négyzetre emelést alkalmazhatjuk.

39. Mindháromszor úgy gyűjtjük össze a lapokat, hogy mindig középre kerüljön az a kupac, amelyben éppen benne van a kiválasztott lap. Ekkor tudjuk, hogy az első összegyűjtés után a 27 lapból a középső 9 valamelyike a keresett kártya. A második szétrakás és összegyűjtés után a középső három lap valamelyike, végül a pakli közepe, tehát a 14. lesz a kiválasztott kártya.

40. *a)* Igen. Pl. a fedőlapon elérhető a (6, 8, 8, 8) helyzet, ezután a (8, 8, 8, 8) számok előállításakor az alaplap csúcsaiba a (3, 2, 3, 4) számok kerülnek. Innen két lépésből eljutunk a (4, 4, 4, 4) állapotba, innen pedig nyolc lépésben a (8, 8, 8, 8) állapotba.

b) A kiindulási helyzetben a csúcsokon lévő számok összege 1 (páratlan). A végállapotban minden csúcsban egyforma szám kell, hogy legyen; ezek összege 8-cal osztható (páros). Amikor az élek végpontjaiban álló számokat eggyel-eggyel megnöveljük, az összeg 2-vel nő, tehát az összeg paritása megmarad. Ez az ellentmondás mutatja, hogy a kívánt végállapot nem érhető el.

40.



c) A kocka csúcsait két csoportra osztjuk úgy, hogy az azonos csoportban lévő csúcsok között ne legyen él. Az egyik csoportba sorolhatjuk az alaplap és a fedőlap két-két szemközti csúcsát (ábra).

Az eljárás folyamán mindkét csoportban az ott lévő számok összege egyszerre nő 1-gyel. Mivel kezdetben ez az összeg különböző volt a két csoportban (0, illetve 2), a csupa egyforma számozás nem érhető el.

41. Egy 4 lépéses konstrukció látható az ábrán (a két üres széket OO-val jelöljük, s aláhúzzuk az éppen átülő gyerekeket).

4-nél kevesebb helycserével a feladat nem oldható meg. Nevezzük „jó szomszédságnak”, ha fiú fiú mellett és lány lány mellett ül. Kezdetben a „jó szomszédságok” száma 0. Az első lépésben ez legfeljebb 1-re nőhet, és a későbbiekben is csak legfeljebb kettesével növelhető. Mivel a végállapotban a „jó szomszédságok” száma 6, ezért nem elég 3 lépés. (A fenti megoldásban a jó szomszédságok száma rendre 0, 1, 3, 4, 6 volt.)

41.

FLFLFLFLOO
FOOLFLFLLF
FFLLOOFLLF
FFLLLLFOOF
OOLLLLFFFF

42. A 10 szám összege mindig ugyanannyi, hiszen összeadásukkor mind a két helyiértéken mind a 10-féle számjegy megjelenik.

43. Legkevesebb 10 négyzetre van szükség. Pl. cm-ben mérve 1 darab 5×5-ösre, 5 darab 2×2-esre és 4 darab 1×1-esre, vagy 1 darab 4×4-esre, 3 darab 3×3-asra és 6 darab 1×1-esre.

44. *a)* Az *a1 – h8* és *a8 – g1* iránnyal 7–7 párhuzamos átló van, tehát legfeljebb 14 futó helyezhető el. Ez a konstrukció meg is valósítható, pl. a tábla szélére helyezett 14 futóval.

b) Egy 2×2-es résztáblára legfeljebb 2, tehát a 8×8-as táblára legfeljebb 32 gyalog helyezhető el. Megfelelő konstrukciót kapunk, ha pl. minden második oszlopba helyezünk gyalogokat.

45. Nem. A dédapák között nagyanyám apja is szerepel, míg nagyapáim dédapjai között nincs rokona nagyanyámnak. (Érdemes felrajzolni a családi származások öt mélységű gráfját.)

46. 31 napos hónap esetén 20-a a hét 3 napjával, 30 napos hónap esetén 2 nappal, februárban pedig 1 nappal tolódik el. Január 20-a csütörtök, 30-a vasárnap, így az egyes hónapok 20. napjait (20) és 30. napjait (30) az alábbi táblázatból olvashatjuk ki:

Napok	1 (31)	2 (29)	3 (31)	4 (30)	5 (31)	6 (30)	7 (31)	8 (31)	9 (30)	10 (31)	11 (30)	12 (31)
hétfő			20							20	20	
kedd					30	20						
szerda								30	20			20
csütörtök	20		30	20			20				30	
péntek						30				20		
szombat					20				30			30
vasárnap	30	20		30			30	20				

20-a csütörtökre, 30-a vasárnapra esett leggyakrabban (háromszor). 13-a és 20-a minden hónapban azonos napra esik, így péntek 13-a csak egyszer volt 2000-ben, októberben.

47. *a)* A szám $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 + 9000 \cdot 4 = 38\,889$ jegyű.

b) Az 1-es számjegyet 0001-től 9999-ig minden helyiértéken 1000-szer írtuk le, összesen 4000-szer. Hasonló a helyzet a 2, 3, …, 9 számjegyekkel. A 0-t az egyes helyiértéken 999-szer, a tízes helyiértéken 990-szer és a százas helyiértéken 900-szor, összesen 2889-szer írtuk le.

c) $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 605 \cdot 3 = 2004$. A 605. háromjegyű szám az 506, a 2004. leírt számjegy 6-os.

48. *a)* Egyetlen mérés elegendő. Az első ládából 1, a másodikból 2, … , az ötödikből 5 súlyt helyezünk a mérlegre. A 15 kg-nál annyi dkg-mal mutat többet a mérleg, ahányadik ládában vannak a hamis súlyok.

b) Ismét elég egyetlen mérés. Most az egyes ládákból rendre 1, 2, 4, 8, 16 darabot helyezünk a mérlegre, s a 31 kg feletti dkg-értékből következtethetünk a hamis ládákra. Ha pl. 31 kg 7 dkg a mért érték, a 7-et felírjuk 2-es számrendszerbeli ötjegyű számként: $7 = 00111$, s ez mutatja, hogy az első három ládában vannak hamis súlyok.

49. A legnehezebb golyót 7 méréssel meghatározhatjuk: 4 pár összehasonlítása után a nehezebbekből 2 párt készítünk, majd ezután a két legnehezebbet hasonlítjuk össze. A második legnehezebb golyó csak azok közül kerülhet ki, amelyeket korábban a legnehezebbel párosítottunk. Ebből a három golyóból már két további méréssel meghatározhatjuk a legnehezebbet.

Permutációk, variációk

Permutációk

50. 6 darab; *ABC*, *ACB*, *BAC*, *BCA*, *CAB*, *CBA*.
51. 6 darab, hasonlóan az 50. feladathoz.
52. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.
53. $4! = 24$.
54. $5! = 120$. Pl. a fiúkat sorba állítjuk, és hozzájuk párosítjuk a lányokat.
55. $5! = 120$.

I

56. *a)* 10!; *b)* n!.
57. 6! = 720. A B halmaz elemeinek minden sorrendje egy hozzárendelést is meghatároz.
58. 5 golyó van, 5! = 120.
59. „Elég jó” megoldásnak számít a hárombetűs szavak körében, ha úgy adunk meg két mássalhangzó között egy magánhangzót, hogy a szó megfordításán kívül még legalább egy további szót is alkothassunk. Pl. a T, $É$, L betűk ilyenek.

Ismétléses permutációk

60. *a)* Ha a két ’a’ különböző betű lenne, 4!-féle szót készíthetnénk. Mivel nem különbözők, az a_1ba_2c és az a_2ba_1c szavakhoz hasonlóan minden szót kétszer számoltunk, így összesen $\frac{4!}{2} = 12$-féle szó készíthető.
b) Ha a három ’a’ különböző betű lenne, 5!-féle szót készíthetnénk. Mivel nem különbözők, minden *aaabc* típusú tényleges sorrendet $a_1a_2a_3bc$, $a_1a_3a_2bc$ stb. alakokban annyiszor vettünk figyelembe, ahányféleképpen a három ’a’ betűt egymás között permutálhatjuk. Eredmény: $\frac{5!}{3!} = 20$.
c) A két ’a’ és a két ’b’ betű miatt az 5 különböző elem sorrendjeit kétszer osztani kell 2!-sal. $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$.
d) $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.
61. Jó megoldásnak számít, ha három értelmes szó készíthető a betűkből; pl. E, E, K, Z.
62. *a)* 3; *b)* $\frac{4!}{2} = 12$; *c)* $\frac{5!}{2} = 60$; *d)* $\frac{6!}{3!} = 120$; *e)* $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$; *f)* $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$; *g)* $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$; *h)* $\frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$.
63. Az a, a, b, b, c, c elemek minden permutációja egy függvényt határoz meg. Összesen $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$-féle függvény van.

Variációk

64. *a)* $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; *b)* $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; *c)* $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
65. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
66. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.
67. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$.
68. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, legalább 6 különböző számjegy kell.
69. $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Ismétléses variációk

70. $3 \cdot 3 = 9$ darab; AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC.
71. *a)* $4^3 = 64$; *b)* $5^3 = 125$; *c)* $6^3 = 216$.
72. 10^5.
73. 3^{14}. Minden mérkőzés végeredménye 3-féle lehet.
74. $2^9 - 1$. Minden mező állapota kétféle lehet, lyukasztott vagy sem; s ebből a 2^9 lehetőségből ki kell hagyni a nem lyukasztott buszjegyet.
75. $\overline{abba}$ típusú négyjegyű számból $9 \cdot 10 = 90$ darab van ($a \neq 0$). Ezek a számok 11-gyel mindig oszthatók, s ha négyzetszámok, akkor 121-gyel is. Végigpróbálva a lehetséges $121 \cdot 9$, $121 \cdot 16$, $121 \cdot 25$, $121 \cdot 36$, $121 \cdot 49$, $121 \cdot 64$, $121 \cdot 81$ számokat, egyik sem lesz megfelelő.
76. *a)* $2^5 = 32$. A legnagyobb helyiértéken 1-es áll, a többi 5 helyiérték kétféle lehet.
b) $2^6 = 64$. Mind a 6 helyiérték 0 vagy 1 lehet.
77. 2^{k-1}, illetve 2^k.
78. $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$. A 32 fog mindegyikének állapota 2-féle lehet.
79. $3^{32} + 1 \approx 1{,}85 \cdot 10^{15}$. Ennyi ember viszont nem él a Földön!
80. $10^3 = 1000$ próbálkozás ideje 6000 másodperc, vagyis 100 perc.
81. *Első megoldás:* Felsorolhatjuk a részhalmazokat: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.
Második megoldás: A részhalmazba minden elem vagy beletartozik, vagy nem; ez $2^3 = 8$ lehetőség.
82. 6^6. Az alaphalmaz mindegyik eleméhez a 6 darab B-beli elem bármelyike rendelhető.
83. Legalább 3 különböző számjegy kell: $3^5 = 243$.

Vegyes feladatok a permutációk és variációk témaköréből

84. A számok elején nem állhat 0. *a)* $3 \cdot 3! = 18$; *b)* $\dfrac{4 \cdot 4!}{2} = 48$;
c) $\dfrac{5 \cdot 5!}{2 \cdot 2} = 150$; *d)* $\dfrac{8 \cdot 8!}{3! \cdot 2} = 26\,880$.
85. Az utolsó helyiértéken páros, illetve páratlan számjegynek kell lennie.
a) $2 \cdot 4! = 48$; *b)* $3 \cdot 4! = 72$.
Háromjegyű számok esetén: *a)* $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$; *b)* $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.
86. *a)* Az utolsó helyiértéken páros számnak kell állnia. Ha az utolsó jegy 0, akkor 4!-féle, ha az utolsó jegy 2 vagy 4, akkor $2 \cdot 3 \cdot 3!$-féle szám készíthető. Összesen $4! + 2 \cdot 3 \cdot 3! = 60$.
b) $2 \cdot 3 \cdot 3! = 36$.
Háromjegyű számok esetén: *a)* $4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 30$;
b) $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.
87. Két esetet vizsgálhatunk az utolsó jegy alapján. $5! + 4 \cdot 4! = 216$.

88. *a)* Ha az utolsó jegy 0, akkor az 1, 1, 1, 2, 2, 3 számjegyekből $\frac{6!}{3!\cdot 2!}$-féle szám készíthető; ha az utolsó jegy 2, akkor a 0, 1, 1, 1, 2, 3 számjegyekből $\frac{5\cdot 5!}{3!}$-féle szám készíthető. Összesen: $\frac{6!}{3!\cdot 2!}+\frac{5\cdot 5!}{3!}=160$.

b) Ha minden számjegy különböző lenne, akkor $4\cdot 5\cdot 5!$-féle számot készíthetnénk. Az egyforma jegyek miatt összesen $\frac{4\cdot 5\cdot 5!}{3!\cdot 2!}=200$-féle szám van.

89. $\frac{8\cdot 8!}{3!\cdot 2!}+\frac{7\cdot 8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=26\,880+35\,280=62\,160$.

90. Az összes esetből (négyjegyű számok) kivonjuk a rossz eseteket (amelyekben nem szerepel a 3-as): $6^4-5^4=671$.

91. $6^5-5^5=4651$.

92. $26^2\cdot(10^4-1)=6\,760\,000$, ebből ki kell hagyni a 0000-típusúakat, amelyek száma 26^2. Összesen 6 759 324-féle rendszámtábla van.

93. Olyan rendszámtábla, melyben nem ismétlődik számjegy, $26^2\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=26^2\cdot 5040$ darab van. Amelyben van számjegyismétlődés, $26^2\cdot 10^4-26^2\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 4=26^2\cdot 4960$ darab; tehát a másik fajtából van több.

94. $26^3\cdot 10^3=17\,576\,000$; kihagyva a 000 típusúakat, az eredmény 17 558 424.

95. Az előző feladatok megoldása alapján $17\,558\,424>6\,759\,324$; új típusú rendszámtábla több van.

96. Az összes hatjegyű szám számából kivonjuk azok számát, amelyekben minden számjegy páratlan. $9\cdot 10^5-5^6=884\,375$.

97. $5^3=125$.

98. $\frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$.

99. Az első jegy 1-es, így 4 darab 1-es és 3 darab 0 számjegy összes permutációjának számát kell meghatározni: $\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$.

100. $\frac{7!}{4!\cdot 3!}+\frac{7!}{5!\cdot 2!}+7+1=64$. A 0 számjegyek száma lehet 3, 2, 1 vagy 0.

101. *a)* $5\cdot 4\cdot 3=60$; *b)* $4\cdot 3=12$; *c)* $4\cdot 3=12$.

d) Ha egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk: *a)* 6^3; *b)* 6^2; *c)* 6^2.

102. Ha a 0 marad ki: $\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$; ha 1-es marad ki: $\frac{5\cdot 5!}{3!}=100$; ha 2-es marad ki: $\frac{5\cdot 5!}{2!\cdot 2!}=150$; ha 3-as marad ki: $\frac{5\cdot 5!}{3!\cdot 2!}=50$ lehetőség van. A hatjegyű számok száma ezek összege: 360.

103. Az összes számból kivonjuk azok számát, melyekben nincs ismétlődő számjegy: $7\cdot 8^4-7\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=22\,792$.

104. Az összes számból kivonjuk azok számát, melyekben nincs 1-es.

a) $7\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4-6\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=3720$; *b)* $7\cdot 8^4-6\cdot 7^4=14\,266$.

105. Az első 5 helyiértéken tetszőleges számok szerepelhetnek: $9 \cdot 10^4$. Ha az első 5 számjegy összege páratlan volt, az utolsó helyiértékre 1, 3, 5, 7, 9 kerülhet; ha az első 5 számjegy összege páros volt, akkor az utolsó helyiértékre 0, 2, 4, 6, 8-at írhatunk. Vagyis az utolsó helyiértékre mindkét esetben 5-féle számjegy kerülhet, az eredmény $5 \cdot 9 \cdot 10^4 = 450\,000$.

106. Az utolsó helyiértékre vagy 0, vagy 2-es kerül: $\dfrac{5!}{3!} + \dfrac{4 \cdot 4!}{3!} = 36$.

107. 10 000-től 99 999-ig 90 000 szám van. Ezek közül minden második, harmadik, illetve negyedik megfelelő.
a) 18 000; *b)* 30 000; *c)* 22 500.

108. $3 \cdot 10^{99}$. A $9 \cdot 10^{99}$ darab százjegyű szám közül minden harmadik osztható hárommal.

109. Komplementer leszámolással $5^3 - 4^3 = 61$.

110. Komplementer leszámolást alkalmazunk.
a) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 27\,120$;
b) $9 \cdot 10^4 - 4 \cdot 5^4 = 87\,500$.

111. $2^8 = 256$. Minden helyiértékre kétféle számjegyet írhatunk, 5-öst vagy 6-ost.

112. *a)* $\dfrac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$. A számjegyek összege csak akkor lesz osztható 9-cel, ha 4 darab 4-es és 4 darab 5-ös számjegyet használunk fel.
b) Két ilyen szám van, a csak 4-esekből, illetve a csak 5-ösökből álló 9 jegyű számok.

113. *a)* Az első hét helyiértékre tetszőleges számjegyeket írhatunk. Ha az első hét számjegy összegének maradéka
−3-mal osztva 0, akkor az utolsó helyiértékre 3 vagy 6 kerül;
−3-mal osztva 1, akkor az utolsó helyiértékre 2 vagy 5 kerül;
−3-mal osztva 2, akkor az utolsó helyiértékre 1 vagy 4 kerül.
Vagyis az utolsó helyiértékre mindhárom esetben 2-féle számjegyet írhatunk, összesen $6^7 \cdot 2$ darab 3-mal osztható szám van.
b) Az előző gondolatmenettel $5 \cdot 6^6 \cdot 2 = 466\,560$.
c) Most az utolsó hét helyiértékre írunk tetszőleges számjegyeket. Ezek összegének 3-mal vett maradékától függően az első számjegy rendre 3 vagy 6; 2 vagy 5; 1 vagy 4 lehet; vagyis minden esetben 2-féle. A megoldás $7^7 \cdot 2 = 1\,647\,086$.

114. $7^{99} \cdot 2 \approx 9{,}24 \cdot 10^{83}$.

115. A középső három helyiértékre tetszőleges számjegyeket írhatunk. Ha ezek összegének maradéka
− 3-mal osztva 0, akkor az első helyiértékre 3, 6 vagy 9 kerül;
− 3-mal osztva 1, akkor az első helyiértékre 2, 5 vagy 8 kerül;
− 3-mal osztva 2, akkor az első helyiértékre 1, 4 vagy 7 kerül.
Vagyis az első helyiértékre mindhárom esetben 3-féle számjegyet írhatunk, összesen $10^3 \cdot 3 = 3000$ megfelelő szám van.

116. 3-mal osztható ötjegyű szám összesen $3 \cdot 10^4 = 30\,000$ darab van. Ezek közül olyan, amelyikben nincs 6-os számjegy, $8 \cdot 9^3 \cdot 3 = 17\,496$ darab van. (Az első négy helyiértékre tetszőleges számjegyeket írhatunk. Ezek összegének 3-mal vett maradékától függően az utolsó számjegy rendre 0, 3 vagy 9; 1, 4 vagy

7; 2, 5 vagy 8 lehet; vagyis minden esetben 3-féle.) A komplementer leszámolás módszerével az eredmény $3 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^3 \cdot 3 = 12\,504$.

117. Az előző megoldás gondolatmenetét alkalmazhatjuk, de most utoljára az első számjegyet határozzuk meg. A komplementer leszámolás módszerével az eredmény $3 \cdot 10^4 - 9^4 \cdot 3 = 10\,317$.

118. Jelöljük az AB párt G-vel, ekkor a G, C, D, E, F elemek permutációinak száma 5!. Mivel AB és BA különböző ülésrendnek számít, az eredmény $2 \cdot 5! = 240$.

119. Komplementer módszerrel $7! - 2 \cdot 6! = 3600$.

120. Az előző megoldások gondolatmenetét alkalmazhatjuk, de 0 nem kerülhet a szám elejére: $6 \cdot 6! - 2 \cdot 5 \cdot 5! = 3120$.
Más megoldási lehetőség: a legfeljebb hétjegyű számokból kivonjuk azokat, amelyek 0-val kezdődnek: $7! - 2 \cdot 6! - (6! - 2 \cdot 5!)$. (Mindkét eredmény kiemelés után $26 \cdot 5! = 3120$.)

121. *a)* A padnak két széle van, ezért $8! - 2 \cdot 7! = 30\,240$.
b) Jelöljük az AB párt J-vel, a CD párt K-val, ekkor a J, K, E, F, G, H elemek permutációinak száma 6!. Mivel AB és BA, valamint CD és DC különböző ülésrendnek számít, az eredmény $2^2 \cdot 6! = 2880$.

122. *a)* Az 1, 2, 3 számokat egyetlen objektumnak tekintve 7! sorrendet kapunk. Mivel ez a három elem egymás között 3!-féleképpen permutálható, az eredmény $7! \cdot 3! = 30\,240$.
b) $7! = 5040$.
c) Mivel az 1, 2, 3 számok sorrendje egymáshoz képest rögzített, jelölhetjük őket a, a, a-val. Ekkor az a, a, a, 4, 5, 6, 7, 8, 9 elemek permutációinak száma a kérdés. Eredmény: $\frac{9!}{3!} = 60\,480$.

123. Az előző megoldások gondolatmenetét alkalmazhatjuk, de 0 nem kerülhet a szám elejére. *a)* $7 \cdot 7! \cdot 3! = 211\,680$; *b)* $7 \cdot 7! = 35\,280$; *c)* $\frac{7 \cdot 7!}{3!} = 5880$.

124. Az előző feladatok megoldása alapján: $(n - k + 1)! \cdot k!$.

125. Az előző feladatok megoldása alapján: $(n - k + 1)!$.

126. Az előző feladatok megoldása alapján: $\frac{n!}{k!}$.

127. *a)* $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$; *b)* $4! \cdot 4! = 576$.

128. *a)* $4! \cdot 4! = 576$; *b)* $2 \cdot 4! \cdot 4! = 1152$.

129. *a)* $4! = 24$. A két darab 1-est egy objektumnak tekinthetjük.
b) A 2-est és 3-ast egy objektumnak tekintve $\frac{4!}{2!}$ számú sorrend lenne, de a 23 és 32 párok különböznek, így az eredmény $2 \cdot \frac{4!}{2!} = 24$.
c) Komplementer leszámolással $\frac{5!}{2!} - 2 \cdot \frac{4!}{2!} = 36$.

130. *a)* $4! = 24$; *b)* $\frac{5!}{3!} \cdot 2 = 40$; *c)* $\frac{6!}{3!} - 2 \cdot \frac{5!}{3!} = 80$.

I

131. *a)* Jelöljük a három szomszédos 1-est A-val, így A, 2, 2, 3, 4 összes sorrendje $\frac{5!}{2!} = 60$.

b) Jelöljük a két 2-est B-vel, így 1, 1, 1, B, 3, 4 összes sorrendje $\frac{6!}{3!} =$ $= 120$.

c) Jelöljük a 3, 4 párt C-vel, így 1, 1, 1, 2, 2, C permutációinak száma $\frac{6!}{3!\cdot 2!}$. De C kétféle lehet (34, illetve 43), ezért az eredmény $2\cdot\frac{6!}{3!\cdot 2!} =$ $= 120$.

d) Komplementer leszámolással $\frac{7!}{3!\cdot 2!} - 2\cdot\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 300$.

132. Az előző megoldásokhoz hasonlóan járunk el, csak arra kell vigyáznunk, hogy 0-val nem kezdődhet szám. *a)* $\frac{7\cdot 7!}{3!} = 5880$; *b)* $\frac{8\cdot 8!}{3!\cdot 2!} - \frac{7\cdot 7!}{3!} = 21\,000$;
c) $\frac{7\cdot 7!}{3!\cdot 2!}\cdot 2 = 5880$; *d)* $\frac{8\cdot 8!}{3!\cdot 2!} - \frac{7\cdot 7!}{3!\cdot 2!}\cdot 2 = 21\,000$.

133. *a)* $52\cdot 51\cdot 50\cdot \ldots \cdot 45 \approx 3{,}03\cdot 10^{13}$; *b)* $52^8 \approx 5{,}35\cdot 10^{13}$.

134. Legfeljebb 8 bástya helyezhető el, hiszen minden oszlopban legfeljebb 1 állhat. Az első oszlopban a bástyát 8 helyre tehetjük. A második oszlopban már csak 7 helyre (nem kerülhet az előzővel egy sorba), a harmadik oszlopban 6 helyre és így tovább. Összesen $8! = 40\,320$-féle elhelyezés lehetséges.

135. *a)* Bontsuk fel a 8×8-as táblát 16 darab 2×2-es résztáblára! Mivel minden 2×2-es résztáblára legfeljebb egy király kerülhet, a 8×8-as sakktáblára legfeljebb 16-ot helyezhetünk el. Az elhelyezés meg is valósítható, ha pl. mindegyik 2×2-es résztábla bal fölső mezőjére tesszük a királyokat.

b) 9 király elhelyezhető az előző konstrukcióval. Több nyilván nem, hiszen a 6×6-os táblára is csak 9-et tehetnénk.

136. *a)* Jelöljük $7\to 6$-tal azt, hogy a 7-es madárnak abba a kalitkába kell kerülnie, ahol most a 6-os madár van. A következő ciklust írhatjuk fel: $7\to 6\to 2\to 9\to 8\to 3\to 4\to 5\to 1\to 7$. Ez azt jelenti, hogy bármelyik madarat kitehetjük az üres kalitkába, a többi nyolc ciklikusan a helyére költöztethető, majd őt is visszatehetjük a saját kalitkájába. Összesen $1 + 8 + 1 = 10$ költöztetésre van szükség.

b) A $3\to 8\to 9\to 2\to 7\to 1\to 3$ és $4\to 5\to 6\to 4$ ciklusok miatt legkevesebb $6 + 1 + 3 + 1 = 11$ lépés kell.

c) Három ciklust kapunk: $3\to 4\to 1\to 3$, $8\to 9\to 2\to 8$, $7\to 6\to 5\to 7$. Legkevesebb $4 + 4 + 4 = 12$ költöztetésre van szükség.
Általában is igaz, hogy n elem és c ciklus esetén a minimális rendezési lépésszám $n + c$.

137. *a)* Jelöljük a háromszög csúcsait 1, 2, 3-mal. Ezen elemek mind a $3! = 6$ számú permutációja meghatároz egy egybevágósági transzformációt. Pl. az (132) permutáció jelentése: az 1-es csúcs helyben maradt, a 2-es és 3-as helyet cserélt. Ez a transzformáció az 1-es csúcson áthaladó szimmetriatengelyre való tükrözés.

A 6 transzformáció: középpont körüli forgatás 0°, 120°, illetve 240°-kal, valamint három tengelyes tükrözés.

b) Jelöljük a négyzet csúcsait 1, 2, 3, 4-gyel! A 4! számú permutációból csak azok határoznak meg egybevágósági transzformációt, amelyekre teljesül, hogy szomszédos csúcsok szomszédosak maradtak. (Pl. megfelel a (2341) permutáció (ez egy forgatás), de nem lehetséges az (1324), mert az 1-es és 2-es csúcsok nem maradtak szomszédosak.) 8 egybevágósági transzformáció van: négy középpont körüli forgatás, négy tengelyes tükrözés.

c) 10 egybevágósági transzformáció van: öt középpont körüli forgatás, öt tengelyes tükrözés.

138. *a)* $4! = 24$-féle jelsorozat van. $2^4 < 24 < 2^5$, ezért legalább 5 kérdés kell, ami elég is pl. a felezéses technika alkalmazásával.

b) $4^4 = 256 = 2^8$, így 8 kérdésre van szükség. (Pl. a sorozat minden egyes jegyét 2 kérdéssel kitalálhatjuk.)

139. $a_n = n!$, ha $n \geq 0$.

Kombinációk, ismétléses kombinációk

Kombinációk

140. Bármely két ember egyszer fog kezet. *a)* $\binom{6}{2} = 15$; *b)* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

141. A halmazok elemeiből kell kettőt úgy kiválasztanunk, hogy sorrendjükre nem vagyunk tekintettel.

a) $\binom{3}{2} = 3$; $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$.

b) $\binom{4}{2} = 6$; $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$.

c) $\binom{5}{2} = 10$; $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$, $\{c, e\}$, $\{d, e\}$.

142. $\binom{5}{2} = 10$, mert bármely két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van.

143. $\binom{5}{2} = 10$, mert bármely két pont meghatároz egy egyenest.

144. Ha n tagú a társaság, $\binom{n}{2} = 136$, innen $n = 17$.

145. Pl. az E, $É$, L, T betűkből elég sok szó készíthető.

146. *a)* $\binom{10}{3} = 120$; *b)* $\binom{10}{7} = 120$. Persze a két érték egyenlő, mert minden kiosztott 3 lap párosítható a ki nem osztott 7 lappal.

147. $\binom{8}{4} = 70$.

148. Minden háromszög, melynek három kék csúcsa van, párba állítható azzal a háromszöggel, amelynek egyik csúcsa piros, a másik két csúcsa pedig a kimaradt két kék pont. Ugyanannyi van tehát mind a két fajta háromszögből. (Pontosan $\binom{5}{3} = 10$ darab.)

149. Az alaphalmazból kell kiválasztanunk úgy 2, 3 stb. elemet, hogy sorrendjükre nem vagyunk tekintettel. *a)* $\binom{6}{2} = 15$; *b)* $\binom{6}{3} = 20$; *c)* $\binom{6}{4} = 15$; *d)* $\binom{6}{5} = 6$.

150. *a)* $\binom{10}{2} = 45$, mert két pont meghatároz egy egyenest.

b) n általános helyzetű pont a síkon $\binom{n}{2}$ egyenest határoz meg.

c) $\binom{10}{3} = 120$. Bármely három kiválasztott pont meghatároz egy háromszöget.

d) $\binom{10}{4} = 210$.

e) $\binom{10}{2} = 45$, mert bármely két egyenesnek egy metszéspontja van.

f) $\binom{10}{3} = 120$.

151. *a)* A $p, p, p, p, p, z, z, z, z$ elemek összes permutációjának száma $\frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$.

b) Válasszuk ki a 9 hosszú sorozat azon 4 helyét, ahová a zöld golyók kerülnek! Ezt $\binom{9}{4}$-féleképpen tehetjük meg, s így egyértelműen megadtuk a sorozatot is.