I. Síkgeometria

Bevezetés a síkgeometriába

Szakaszok; sokszögek átlói

1. A szakasz kétszereséből az eredeti szakaszt a szakaszfelező merőleges és a kétszeres szakasz metszéspontjának megjelölésével kaphatjuk. A felezéspont és a kétszeres szakasz bármelyik végpontja meghatározza a szerkesztendő szakaszt.

2. A $3m - 2n$ szakasz csak akkor szerkeszthető, ha $3m - 2n \geq 0 \Rightarrow m \geq \frac{2}{3}n$. Egyenlőség esetén a keresett szakasz 0 hosszúságú.

3. Legyen a két szakasz összege $a + b$, különbsége $a - b$ és $a + b > a - b$! Az összeg- és különbségszakasz összege a nagyobb szakasz kétszeresét adja $(a + b + a - b = 2a)$, így ennek felezésével a nagyobb szakaszhoz jutunk. Az összeg- és különbségszakasz különbsége a kisebb szakasz kétszeresét adja $(a + b - (a - b) = 2b)$, így ennek felezésével a kisebb szakaszhoz jutunk.

4. Legyen a két adott szakasz $2a + b$ és $2a - b$! $2a + b + 2a - b = 4a \Rightarrow$ A $4a$ szakasz felének felezésével az egyik szakaszhoz jutunk. $2a + b - (2a - b) = 2b \Rightarrow$ A $2b$ szakasz felezésével a másik szakaszhoz jutunk.

5. $CD = CB + BD \Rightarrow BD = CD - CB = 8$ cm; $AD = AB + BD = 10\text{ cm} + 8\text{ cm} = \underline{\underline{18\text{ cm}}}$.

6. *a)* $AC + BD < AB$ miatt a pontok A; C; D; B sorrendben helyezkednek el.
$CD = AB - AC - BD = \underline{\underline{14\text{ m}}}$;

b) $AC + BD > AB$ miatt a pontok A; D; C; B sorrendben helyezkednek el.
$DC = AC + BD - AB = \underline{\underline{4{,}7\text{ m}}}$.

7. $AB = 5\text{ cm} \Rightarrow F_1B = \frac{5}{2}\text{ cm}$; $BC = 17\text{ cm} \Rightarrow BF_2 = \frac{17}{2}\text{ cm}$; $F_1F_2 = F_1B + BF_2 = \underline{\underline{11\text{ cm}}}$.

8. Legyen az AB szakasz felezőpontja F_1, az AC szakasz felezőpontja pedig F_2.

a) **1. eset:** B elválasztja A-t és C-t. $AF_1 = 50$ m; $AF_2 = 80$ m;
$AF_2 = AF_1 + F_1F_2 \Rightarrow F_1F_2 = AF_2 - AF_1 = \underline{\underline{30\text{ m}}}$.

2. eset: A elválasztja B-t és C-t. $AF_1 = 50$ m; $F_2A = 80$ m;
$F_1F_2 = F_1A + AF_2 = \underline{\underline{130\text{ m}}}$.

b) **1. eset:** C elválasztja A-t és B-t. $AF_1 = \frac{a}{2}$; $AF_2 = \frac{b}{2}$;

$AF_2 + F_2F_1 = AF_1 \Rightarrow F_2F_1 = AF_1 - AF_2 = \underline{\underline{\frac{a-b}{2}}}$. C és F_1 sorrendje nem befolyásolja a megoldást.

2. eset: A elválasztja B-t és C-t. $AF_1 = \frac{a}{2}$; $F_2A = \frac{b}{2}$; $F_2A + AF_1 = F_2F_1 = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}$.

I

9. $AC = AB + BC = a + b$; $AF = \frac{1}{2} \cdot AC = \underline{\underline{\frac{a+b}{2}}}$.

10. $AP:PB = 2:3 \Rightarrow 2x + 3x = 90\,\text{m} \Rightarrow x = 18\,\text{m}$; $\underline{\underline{AP = 36\,\text{m}}}$; $\underline{\underline{PB = 54\,\text{m}}}$.

11. $AP:PB = b:c \Rightarrow b \cdot x + c \cdot x = a \Rightarrow x = \frac{a}{b+c}$; $\underline{\underline{AP = b \cdot \frac{a}{b+c}}}$; $\underline{\underline{PB = c \cdot \frac{a}{b+c}}}$.

12. Jelöljük a felezőpontot F-fel, a $2:3$ arányú osztópontot G-vel! $AF = FB = \frac{35}{2}\,\text{m}$;
$AG:GB = 2:3 \Rightarrow 2x + 3x = 35\,\text{m} \Rightarrow x = 7\,\text{m} \Rightarrow AG = 14\,\text{m}$;
$AG + GF = AF \Rightarrow GF = AF - AG = \underline{\underline{3\frac{1}{2}}}\,\text{m}$.

13. Jelöljük a felezőpontot F-fel, a $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$ arányú osztópontot G-vel!
$AF = FB = \frac{5,6}{2}\,\text{m} = 2,8\,\text{m}$; $AG:GB = \frac{2}{3} : \frac{4}{15} \Rightarrow \frac{2}{3}x + \frac{4}{15}x = 5,6\,\text{m} \Rightarrow x = 6\,\text{m} \Rightarrow$
$\Rightarrow AG = 4\,\text{m}$; $AG = AF + FG \Rightarrow FG = AG - AF = \underline{\underline{1,2\,\text{m}}}$.

14. $AC:CB = 2:5 \Rightarrow 2x + 5x = 42\,\text{cm} \Rightarrow x = 6\,\text{cm} \Rightarrow AC = 12\,\text{cm}$; $AD:DB = 3:4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + 4x = 42\,\text{cm} \Rightarrow x = 6\,\text{cm} \Rightarrow AD = 18\,\text{cm}$; $AD = AC + CD \Rightarrow CD = AD - AC = \underline{\underline{6\,\text{cm}}}$.

15. $AC = AB + BC$; $DB = DC + CB = -CD - BC$; $AD = AB + BC + CD$;
$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC =$
$= AB \cdot CD + (AB + BC) \cdot \{-CD - BC\} + (AB + BC + CD) \cdot BC =$
$= AB \cdot CD - AB \cdot CD - BC \cdot CD - AB \cdot BC - BC^2 + AB \cdot BC + BC^2 + CD \cdot BC = 0.$
A feladat általánosítható. A pontok más sorrendben való elhelyezkedésekor is fennáll az előjeles szakaszok között felírt összes egyenlőség. Például A, D, C, B sorrend esetén:
$AC = AB - CB = AB + BC$; $DB = DC + CB = -CD - BC$; $AD = AB - CB - DC =$
$= AB + BC + CD$.

16. $AC = AB + BC$; $BD = BC + CD$; $AD = AB + BC + CD$.
(1) $AC^2 \cdot BD + CD^2 \cdot AB = (AB + BC)^2 \cdot (BC + CD) + CD^2 \cdot AB =$
$= (AB^2 + 2AB \cdot BC + BC^2) \cdot (BC + CD) + CD^2 \cdot AB =$
$= AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + 2AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + BC^3 + BC^2 \cdot CD + CD^2 \cdot AB.$
(2) $BC^2 \cdot AD + AB \cdot BD \cdot AD = BC^2 \cdot (AB + BC + CD) + AB \cdot (BC + CD) \cdot (AB + BC + CD) =$
$= AB \cdot BC^2 + BC^3 + BC^2 \cdot CD + (AB \cdot BC + AB \cdot CD) \cdot (AB + BC + CD) =$
$= AB \cdot BC^2 + BC^3 + BC^2 \cdot CD + AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + AB \cdot CD^2 =$
$= AB^2 \cdot BC + AB^2 \cdot CD + 2AB \cdot BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot CD + BC^3 + BC^2 \cdot CD + CD^2 \cdot AB.$
(1) és **(2)** összefüggések jobb oldala egyenlő, tehát az állítás igaz.

17. *a)* 4 pont esetén $\frac{4 \cdot 3}{2} = \underline{\underline{6}}$ lehetséges egyenes van. *b)* 5 pont esetén $\frac{5 \cdot 4}{2} = \underline{\underline{10}}$ lehetséges egyenes van. *c)* 212 pont esetén $\frac{212 \cdot 211}{2} = \underline{\underline{22\,366}}$ lehetséges egyenes van. *d)* n pont esetén $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$ lehetséges egyenes van. Bármely két pont egyetlen egyenest határoz meg, mivel semelyik három nincs egy egyenesen. Annyi egyenes van, ahányféleképpen n pontból 2-t ki lehet választani.

18. A kiválasztott csúcsból önmagába és a két szomszédjába nem indul átló. Az egy csúcsból induló átlók száma: *a)* $5-3=\underline{\underline{2}}$; *b)* $16-3=\underline{\underline{13}}$; *c)* $\underline{\underline{n-3}}$.

19. *a)* Az egyik csúcsból kiinduló 2 átló $\underline{\underline{3\,\text{db}}}$ háromszöget hoz létre.

b) Az egy csúcsból kiinduló átlók száma $12-3=9$. Az 1. átló 1 db háromszöget és egy tizenegyszöget hoz létre a tizenkétszögből. A 2. átló újabb háromszöget és egy tízszöget, a 3. átló a 3. háromszöget és egy kilencszöget, ... a 9. átló a 9. háromszöget és még egy háromszöget, azaz összesen $\underline{\underline{10\,\text{db}}}$-ot hoz létre.

c) $\underline{\underline{(n-2)\,\text{db}}}$ háromszög keletkezik.

20. Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsából $(n-3)$ db átló húzható. $n-3=12 \Rightarrow \underline{\underline{n=15}}$.

21. Az n oldalú konvex sokszöget az egy csúcsból induló átlók $(n-2)$ db háromszögre bontják. $n-2=18 \Rightarrow \underline{\underline{n=20}}$.

22. $n+(n-3)=17 \Rightarrow \underline{\underline{n=10}}$.

23. Az n oldalú sokszög egy csúcsából $(n-3)$ db átló indul. n csúcsból $n\cdot(n-3)$ db átló indul, de így minden átlót kétszer számoltunk, tehát az összes átlók száma: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$. A feltétel szerint: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=27$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=9}}$.

24. *a)* Egy kiszemelt gyerek minden társával helyet cserélhet, tehát $\underline{\underline{6}}$ cserepartnere lehet.

b) 1 játékos 6 helyre cserélhet. 7 játékos $7\cdot 6=42$ helyre, de minden cserében ketten szerepelnek, így a valóságos cserék száma: $\frac{7\cdot 6}{2}=\underline{\underline{21}}$.

25. Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

A feltétel szerint: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=6n$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=15}}$.

26. Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

A feltétel szerint: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=n$. Ebből a pozitív megoldás $\underline{\underline{n=5}}$.

Szögek, szögpárok

27. $45°=90°:2$, tehát ∟-et kell felezni.
A szabályos háromszög mindhárom szöge 60°, tehát szabályos háromszöget kell szerkeszteni.
$30°=\frac{1}{2}\cdot 60°$, tehát 60°-os szöget kell felezni. $22{,}5°=\frac{1}{2}\cdot 45°$, tehát 45°-os szöget kell felezni.
$15°=\frac{1}{2}\cdot 30°=\frac{1}{4}\cdot 60°$, tehát a 60°-os szög felét kell felezni.

28. A 90°-os és a 60°-os szögekből szögfelezéssel és összeadással többféleképpen is szerkeszthetők a kérdéses szögek, például: $105° = 60° + \frac{1}{2} \cdot 90°$; $52{,}5° = \frac{1}{2} \cdot 60° + \frac{1}{4} \cdot 90°$;

$75° = \frac{1}{2} \cdot (60° + 90°)$; $67{,}5° = \frac{3}{4} \cdot 90°$; $135° = \frac{3}{2} \cdot 90°$.

29. Szerkesztési feladat, megoldását az olvasóra bízzuk.

30. Legyen $\alpha + \beta = \delta$ az egyik, $\alpha - \beta = \varepsilon$ a másik megadott szög! Az értelmezés miatt $\alpha > \beta$ és $\delta > \varepsilon$. A két egyenlet összegéből $\alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a nagyobb szög megkapható a megadott szögek összegének felezésével. Az első és a második egyenlet különbségéből $\beta = \frac{\delta - \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a kisebb szög megkapható a megadott szögek különbségének felezésével.

31. Legyen $2\alpha + \beta = \delta$ az egyik, $2\alpha - \beta = \varepsilon$ a másik megadott szög! Az értelmezés miatt $\alpha > \frac{\beta}{2}$ és $\delta > \varepsilon$. A két egyenlet összegéből $\alpha = \frac{\delta + \varepsilon}{4} \Rightarrow$ az egyik szög megkapható a megadott szögek összegének kétszeri felezésével. Az első és a második egyenlet különbségéből $\beta = \frac{\delta - \varepsilon}{2} \Rightarrow$ a másik szög megkapható a megadott szögek különbségének felezésével.

32. $\alpha : \beta = 7 : 3 \Rightarrow \alpha = 7\varepsilon$ és $\beta = 3\varepsilon$. A feltétel szerint: $7\varepsilon = 3\varepsilon + 72° \Rightarrow \varepsilon = 18° \Rightarrow \alpha + \beta = \underline{\underline{180°}}$.

33. $\alpha : \beta = 5 : 2 \Rightarrow \alpha = 5\varepsilon$ és $\beta = 2\varepsilon$. A feltétel szerint: $5\varepsilon = 2\varepsilon + 54° \Rightarrow \varepsilon = 18° \Rightarrow$ $\underline{\underline{\alpha = 90°}}$ és $\underline{\underline{\beta = 36°}}$.

34. $\alpha + \beta = 216°$ és $\alpha + \frac{\beta}{2} = 180° \Rightarrow$ $\underline{\underline{\beta = 72°}}$ és $\underline{\underline{\alpha = 144°}}$.

35. $\alpha + \alpha + 10° + \alpha + 20° + \alpha + 30° = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$. A szögek nagysága: $\underline{\underline{30°}}$; $\underline{\underline{40°}}$; $\underline{\underline{50°}}$; $\underline{\underline{60°}}$.

36. Jelöljük az első és a második sugár szögét α-val! $\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 8\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 24°$.
A keresett szögek: $\underline{\underline{24°}}$; $\underline{\underline{48°}}$; $\underline{\underline{96°}}$; $\underline{\underline{192°}}$.

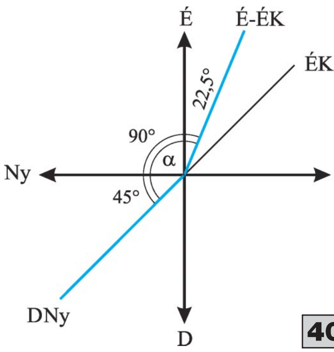
37. 0 órától 12 óráig rendre a mutatók által bezárt szög: 0°; 30°; 60°; 90°; 120°; 150°; 180°; 150° (210°); 120° (240°); 90° (270°); 60° (300°); 30° (330°) és 0° (360°).

38. 1 óra alatt a kismutató 30°-ot fordul el. *a)* negyed hét; $\frac{1}{4}$ óra alatt a 30° negyedét tette meg, így a 6-ostól számítva 7,5°-ot fordult a kismutató. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 7{,}5° = \underline{\underline{97{,}5°}}$-os szöget zár be.

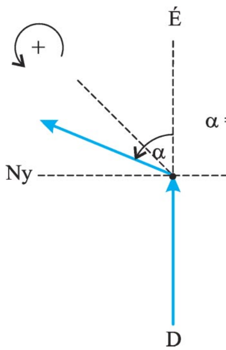
b) fél tíz; $\frac{1}{2}$ óra alatt a kismutató a 30° felét tette meg, így 15°-ot fordult. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 15° = \underline{\underline{105°}}$-os szöget zár be.

c) háromnegyed öt; $\frac{3}{4}$ óra alatt a kismutató a 30° háromnegyedét tette meg, így 22,5°-ot fordult. A nagymutató pillanatnyi állásával $90° + 30° + (30° - 22{,}5°) = \underline{\underline{127{,}5°}}$-os szöget zár be.

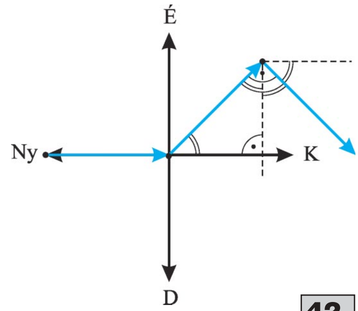
39. 1 óra alatt a kismutató 30°-ot fordul el. *a)* 2 óra 20 perc; a kismutató a 2-höz képest $\frac{1}{3} \cdot 30° = 10°$-ot, a nagymutató pedig 60°-ot haladt. A bezárt szög $60° - 10° = \underline{\underline{50°}}$.



40.



41.



42.

b) 3 óra 32 perc; a kismutató a 3-hoz képest $\frac{32}{60} \cdot 30° = 16°$-ot, a nagymutató pedig $90° + 12° =$ $= 102°$-ot haladt. A bezárt szög $102° - 16° = \underline{\underline{86°}}$.

40. Az ábra jelöléseit használva $\alpha = 45° + 90° + 22,5° = \underline{\underline{157,5°}}$.

41. $\alpha = 67,5° = 45° + 22,5° \Rightarrow$ a hajó *nyugat-északnyugati* irányban halad.

42. A repülőgép *délkelet* felé halad.

43. *a)* $21° 36' = \underline{\underline{21,6°}}$; *b)* $49° 9' = \underline{\underline{49,15°}}$; *c)* $51° 24' 18'' = \underline{\underline{51,405°}}$; *d)* $17° 27' 45'' = \underline{\underline{17,4625°}}$.

44. *a)* $108,5° = \underline{\underline{108° 30'}}$; *b)* $20,7° = \underline{\underline{20° 42'}}$; *c)* $18,3° = \underline{\underline{18° 18'}}$; *d)* $59,7° = \underline{\underline{59° 42'}}$;
e) $100,01° = \underline{\underline{100° 36''}}$.

45. $\delta = \alpha = 32° 42'$, mert csúcsszögek; $\varepsilon = \alpha = 32° 42'$, mert egyállású szögek;
$\sigma = \alpha = 32° 42'$, mert váltószögek; $\beta = \gamma = 180° - 32° 42' = 147° 18'$, mert α mellékszögei;
$\eta = \omega = 180° - 32° 42' = 147° 18'$, mert α társszögei.

46. $\alpha = 90° - \alpha + 16° 28' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 53° 14'}}$.

47. $\alpha = \frac{1}{5} \cdot (180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$.

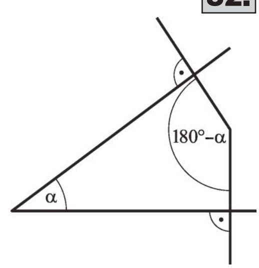
48. $\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$.

49. $\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90°}}$. Akkor egyenlő a szög a társszögével, ha 90°-os.

50. *a)* $\alpha = \frac{2}{3} \cdot (180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 72°}}$; *b)* $\alpha = \frac{3}{7} \cdot (180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 54°}}$;
c) $\alpha = \frac{3}{5} \cdot (180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 67,5°}}$.

51. *a)* $\alpha + (180° - \alpha) + (180° - \alpha) = 1\frac{3}{16} \cdot 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 146,25°}}$;
b) $\alpha + (180° - \alpha) + (180° - \alpha) = 1\frac{5}{9} \cdot 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 80°}}$.

52.



52. A feltételeknek megfelelő merőleges szárú szögek nem egyenlők, hanem egymás kiegészítő szögei.
a) $\alpha = 3 \cdot (180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 45°}}$;
b) $\alpha = 4 \cdot (180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 144°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 36°}}$;
c) $\alpha = 3 \cdot (180° - \alpha) \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 150°}}$; $\underline{\underline{180° - \alpha = 30°}}$.

53. A feltételeknek megfelelő merőleges szárú szögek nem egyenlők, hanem egymás kiegészítő szögei. *a)* $\beta = 11\alpha \Rightarrow \alpha + 11\alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 15°}}$; $\underline{\underline{\beta = 165°}}$; *b)* $\beta = \frac{1}{3}\alpha \Rightarrow \alpha + \frac{1}{3}\alpha = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135°}}$; $\underline{\underline{\beta = 45°}}$; *c)* $\beta = \frac{7}{2}\alpha \Rightarrow \alpha + \frac{7}{2}\alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 40°}}$; $\underline{\underline{\beta = 140°}}$.

54. $TCA\triangle$-ben $CTA\sphericalangle = 90° \Rightarrow TCA\sphericalangle = 90° - \alpha$. Az $ABC\triangle$-ben $\beta = 90° - \alpha$, így az előző állítással összevetve $TCA\sphericalangle = \beta$ adódik. A másik állítás hasonlóan belátható.

55. A párhuzamos szárú konvex szögek nagysága csak akkor különbözhet egymástól, ha társszögek. $\alpha + \beta = 180°$; $\alpha = \beta + 90°$; $\beta + 90° + \beta = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 45°}}$; $\underline{\underline{\alpha = 135°}}$.

56. A párhuzamos szárú konvex szögek nagysága csak akkor különböző, ha társszögek.
a) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 90° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45°}}$; $\underline{\underline{\beta = 135°}}$.
b) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 120° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 150°}}$.
c) $\alpha + \beta = 180°$; $\beta = 75° + \alpha$; $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52{,}5°}}$; $\underline{\underline{\beta = 127{,}5°}}$.

57. $\delta = 1\frac{3}{5} \cdot 90° = 144°$; $ADB\sphericalangle = 180° - \delta = 36°$, mert δ-val társszögek.
$ADB\triangle$-ben $DAB\sphericalangle = 180° - 36° - \frac{144°}{2} = \underline{\underline{72°}}$.

58. $2 \cdot \frac{\beta}{2} + 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 180° \Rightarrow \sphericalangle(f_1; f_2) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \underline{\underline{90°}}$.

59. $\sphericalangle(a; b) = 2\alpha$; felezője f_1 és $\sphericalangle(b; c) = 2\beta$; felezője f_2. $f_1 \perp f_2 \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle(a; c) = 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow a$ és c egy egyenest alkot.

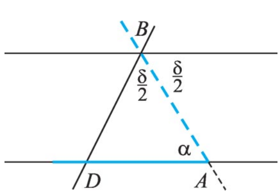
60. A keletkezett szögek vagy csúcsszögek vagy mellékszögek vagy egyállású szögek vagy társszögek. A csúcsszögeknek közös a szögfelezőjük, a mellékszögeknek az **58.** feladat állítása szerint merőleges, az egyállású szögeknek párhuzamos, a társszögeknek pedig merőleges. Az állítás is párhuzamosságot vagy merőlegességet fogalmazott meg.

61. $f_\alpha \perp f_\beta$ miatt az **59.** feladat állítását felhasználva: $\alpha + \beta = 180°$.
A feltétel szerint: $\beta = \alpha + 130° \Rightarrow \alpha + \alpha + 130° = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 25°}}$; $\underline{\underline{\beta = 155°}}$.

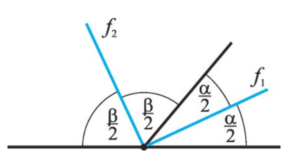
62. Az ábra jelöléseit használva: $\delta_1 = 127°\,17'$;
B_1AC_1M négyszögben $360° = \alpha + 90° + 90° + 127°\,17' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52°\,43'}}$.

63. **1. eset:** A tompaszög az A csúcsnál van. A 63/I. ábra jelöléseivel: $\delta_2 = 47°\,6'\,42''$.
B_1AC_1M négyszögben $360° = \alpha + 90° + 90° + 47°\,6'\,42'' \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 132°\,53'\,18''}}$.

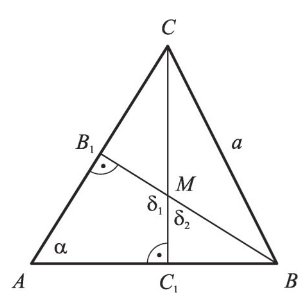
57.



58.

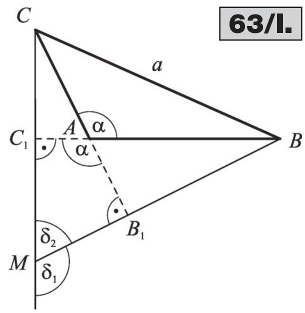


62.

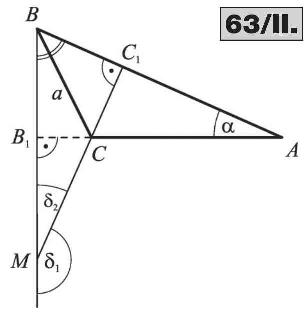


2. eset: A tompaszög a C csúcsnál van. BC_1M derékszögű háromszögben $MBC_1\sphericalangle = 90° - \delta_2$; AB_1B derékszögű háromszögben $B_1BA\sphericalangle$ $(= MBC_1\sphericalangle) = 90° - \alpha$.
A két egyenlőséget összevetve: $\underline{\underline{\alpha = \delta_2 = 47°6'42''}}$.

63/I.



63/II.



Sokszögek szögösszege

64. n darab háromszög keletkezett, szögeik összege $n \cdot 180°$. E szögek közül azok, amelyeknek csúcsa az adott pont, nem tartoznak a sokszög belső szögeihez, és együtt 360°-ot alkotnak. Ezért az állítás igaz.
65. Az n oldalú konvex sokszög egy csúcsból induló átlói $(n - 2)$ db háromszögre bontják a sokszöget. A háromszögek szögei részben vagy egészen a sokszög szögeit alkotják, és a sokszög minden szöge ezen háromszögek szögeiből adódik. A sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180°$. *a)* négyszög esetében $(4 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{360°}}$; *b)* nyolcszög esetében $(8 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{1080°}}$; *c)* tizenháromszög esetében $(13 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{1980°}}$; *d)* kilencvenhatszög esetében $(96 - 2) \cdot 180° = \underline{\underline{16\,920°}}$;
66. A konkáv csúcsból induló átló a konkáv négyszöget 2 db háromszögre bontja. A négyszög belső szögeinek összege egyenlő a két háromszög belső szögeinek összegével, azaz 360°-kal.
67. $(n - 2) \cdot 180° = 1620° \Rightarrow \underline{\underline{n = 11}}$. Tizenegy oldalú a sokszög.

68. *a)* egyenlő szögű ötszög: $\alpha_5 = \dfrac{(5-2) \cdot 180°}{5} = \underline{\underline{108°}}$;

b) egyenlő szögű hatszög: $\alpha_6 = \dfrac{(6-2) \cdot 180°}{6} = \underline{\underline{120°}}$;

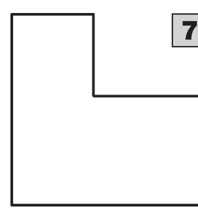
c) egyenlő szögű hétszög: $\alpha_7 = \dfrac{(7-2) \cdot 180°}{7} = \underline{\underline{128{,}57°}}$;

d) egyenlő szögű tízszög: $\alpha_{10} = \dfrac{(10-2) \cdot 180°}{10} = \underline{\underline{144°}}$;

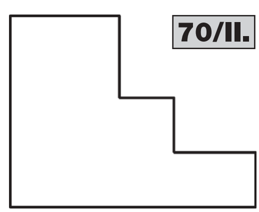
e) egyenlő szögű n-szög: $\alpha_n = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.

69. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy a négyszög α, β, γ, δ szögei 90°-nál kisebbek! $\Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma + \delta < 90° + 90° + 90° + 90° = 360°$, ami ellentmond annak, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°.
70. Például: *a)* 70/I. ábra; *b)* 70/II. ábra.
71. Ha bármely két szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor a sokszögnek csak 90°-os és 270°-os szögei lehetnek. Tegyük fel, hogy az $(n + k)$ oldalú sokszögnek n db 90°-os és k db 270°-os szöge van! A belső

70/I.



70/II.



I

szögek összegére fennáll: $n \cdot 90° + k \cdot 270° = (n + k - 2) \cdot 180° \Rightarrow k = n - 4 \Rightarrow k$ és n azonos paritásúak, tehát az összegük (a sokszög oldalszáma) páros.

72. n oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180°$; $(n + 4)$ oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n + 2) \cdot 180°$. A változás $4 \cdot 180° = \underline{\underline{720°}}$ növekedés.

73. Az n oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(n - 2) \cdot 180° = s$; $2n$ oldalú sokszög belső szögeinek összege: $(2n - 2) \cdot 180° = (2n - 4) \cdot 180° + 360° = 2 \cdot (n - 2) \cdot 180° + 360° = 2s + 360°$. A szögösszeg $(s + 360°)$-kal nőtt.

74. *a)* Tekintsük a háromszög belső és külső szögeinek összegét! $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 180° + 180° + 180°$; $\alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 540°$; $\alpha' + \beta' + \gamma' = 540° - (\alpha + \beta + \gamma) = 540° - 180° = \underline{\underline{360°}}$.

b) Az *a)* pontban látott gondolatmenetet követjük. Az ötszög belső és külső szögeinek összege: $5 \cdot 180° = 900°$. A belső szögek összege: 540°. A külső szögek összege: $900° - 540° = \underline{\underline{360°}}$.

c) Az *a)* pontban látott gondolatmenetet követjük. Az n oldalú konvex sokszög belső és külső szögeinek összege: $n \cdot 180°$; a belső szögek összege: $(n - 2) \cdot 180°$. A külső szögek összege: $n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = \underline{\underline{360°}}$.

75. $(n - 2) \cdot 180° + \alpha' = 1846°$; $0 < \alpha' < 180°$; $(n - 2) \cdot 180° - 1800° + \alpha' = 46°$; $(n - 12) \cdot 180° = 46° - \alpha'$. Az egyenlet bal oldala osztható 180-nal. A jobb oldal csak akkor lehet osztható, ha $\underline{\underline{\alpha' = 46°}} \Rightarrow \underline{\underline{n = 12}}$. A sokszög 12 oldalú, a külső szög 46°.

76. A feladat feltételei szerint az ötszög belső szögeinek összege: $x + 2x + 3x + 4x + 5x = 540° \Rightarrow x = 36°$. A keresett szögek: 36°; 72°; 108°; 144°; 180°. Mivel belső szög nem lehet 180°, így ilyen ötszög nem létezik.

77. Tekintsük a négyszög egyik oldalegyenesén lévő belső és külső szögek összegét! $\alpha + \alpha' = 180°$; $\beta + \beta' = 180° \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 360°$. A négyszög belső szögeinek összege 360°: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° = \alpha + \beta + \alpha' + \beta' \Rightarrow \alpha' + \beta' = \gamma + \delta$.

78. A belső szögek összege $(n - 2) \cdot 180°$, a külső szögeké 360°. $(n - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 360° \Rightarrow \underline{\underline{n = 8}}$ oldalú a sokszög.

79. *a)* Legyen α és γ szögfelezőjének metszéspontja M!

$AMCB$ négyszögben $AMC\sphericalangle = 360° - \frac{\alpha}{2} - \beta - \frac{\gamma}{2} = 360° - 36° - 122° - 34° = 168°$.

A két szögfelező hajlásszöge: $180° - AMC\sphericalangle = \underline{\underline{12°}}$.

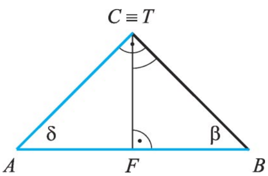
b) Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P! $ABP\triangle$-ben $\delta = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180° - 36° - 61° = 83°$. A két szögfelező hajlásszöge: $\underline{\underline{\delta = 83°}}$.

80. Tekintsük át az egyes háromszögtípusok belső és külső szögeinek számát az alábbi táblázat segítségével!

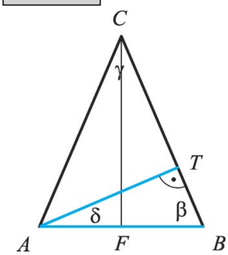
	Belső szögek			Külső szögek		
	hegyesszög	tompaszög	derékszög	hegyesszög	tompaszög	derékszög
Hegyesszögű háromszög	3 db				3 db	
Derékszögű háromszög	2 db		1 db		2 db	1 db
Tompaszögű háromszög	2 db	1 db		1 db	2 db	

A külső szögek között legfeljebb egy volt hegyesszög és legalább kettő a tompaszög.

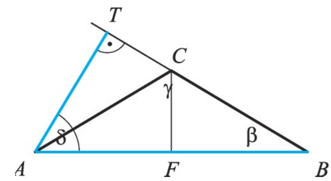
84/I.



84/II.



84/III.



81. Jelöljük a keresett sokszög oldalainak számát n-nel! Tegyük fel, hogy a sokszög minden külső szöge legalább 90°! A külső szögek összege 360°, így fennáll a $360° \geq n \cdot 90° \Rightarrow n \leq 4$ egyenlőtlenség. Tehát $n \geq 5$ esetén biztosan van a külső szögek között hegyesszög.

82. Jelöljük a háromszög alapját BC-vel, az A-nál lévő külső szögfelezőt pedig e-vel!

$$\sphericalangle(e;\ AC) = \frac{180° - \alpha}{2}; \quad BCA\sphericalangle = \frac{180° - \alpha}{2} \Rightarrow \sphericalangle(e;\ AC) = BCA\sphericalangle.$$

A két egyenlő szög egyik szára ugyanannak az egyenesnek két ellentétes irányú félegyenese, másik száruk a fenti egyenes által határolt más-más félsíkban van. ⇒ A két szög váltószög ⇒ $e \parallel a$.

83. Jelöljük az A csúcsnál lévő külső szög felezőjét e-vel! $a \parallel e \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha'}{2}$, mert váltószögek,

$$\beta = 180° - \alpha - \frac{\alpha'}{2} = 180° - \alpha - \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{\alpha'}{2} = \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \Rightarrow \underline{\underline{c = b}}.$$

84. $ATB\triangle$-ben: $\delta = 90° - \beta$; F az AB alap felezéspontja ⇒ CF szimmetriatengely felezi a szárszöget és merőleges az alapra. $CFB\triangle$-ben: $\frac{\gamma}{2} = 90° - \beta$. Az állításokból $\delta = \frac{\gamma}{2}$ adódik.

85. Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P, az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge δ!

$$\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2} < 90°, \text{ tehát } \delta \text{ a szögfelezők hajlásszöge.}$$

a) $\delta = 90° - 16,3° = \underline{\underline{73,7°}}$; *b)* $\delta = 90° - 45° = \underline{\underline{45°}}$; *c)* $\delta = 90° - 75°\,7' = \underline{\underline{14°\,53'}}$.

86. A külső szögre vonatkozó tételből: $\alpha' = \beta + \gamma$; a feladat feltétele szerint: $\alpha' = 2\beta$. A két állítást összevetve: $\beta = \gamma \Rightarrow$ a háromszög egyenlő szárú.

87. *a)* A szárszög 60° ⇒ az alapon fekvő szögek $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$-osak ⇒ a háromszög szabályos. *b)* Az alapon fekvő szögek 60°-osak ⇒ a szárszög $180° - 2 \cdot 60° = 60°$ ⇒ a háromszög szabályos.

Háromszögek belső és külső szögei

88. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 5x$; $\beta = 7x$; $\gamma = 5x + \frac{1}{18} \cdot 180° = 5x + 10°$. A háromszög belső szögeinek összege: $5x + 7x + 5x + 10° = 180° \Rightarrow x = 10° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 50°}}$; $\underline{\underline{\beta = 70°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 60°}}$.

89. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 70°$; $\beta = 5x$; $\gamma = 6x$. A háromszög belső szögeinek összege: $70° + 5x + 6x = 180° \Rightarrow x = 10° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 50°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 60°}}$.

90. *a)* A feladat feltételei szerint: $\alpha = x$; $\beta = 2x$; $\gamma = 3x$. A háromszög belső szögeinek összege: $x + 2x + 3x = 180° \Rightarrow x = 30° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 60°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 90°}}$.

b) A megoldásmenet *a)*-hoz hasonló: $\underline{\underline{\alpha = 45°}}$; $\underline{\underline{\beta = 60°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 75°}}$.

c) A megoldásmenet *a)*-hoz hasonló: $\underline{\underline{\alpha = 30°}}$; $\underline{\underline{\beta = 70°}}$; $\underline{\underline{\gamma = 80°}}$.

91. A feladat feltételei szerint: $\alpha = 42°\,24'$; $\beta = \gamma + 27{,}1° = \gamma + 27°\,6'$. A háromszög belső szögeinek összege: $42°\,24' + \gamma + 27°\,6' + \gamma = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 55°\,15'}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 82°\,21'}}$.

92. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy a P pontból az e egyenesre két merőleges egyenes húzható! Legyen ezeknek e-vel való metszéspontja T_1 és T_2! $T_1 \neq T_2 \Rightarrow$ A két merőleges egymással bezárt szöge: $\gamma > 0$. A $T_1T_2P\triangle$ belső szögeinek összege $90° + 90° + \gamma > 180°$, ami lehetetlen. $\Rightarrow$ Nem létezhet a két merőleges.

93. Legyen $\alpha' = 87°! \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 93°}}$. Jelöljük a 27°-os szöget β-val!

A harmadik szög $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = \underline{\underline{60°}}$.

94. A feladat feltételei szerint $\alpha = 2\gamma'$; $\beta = 3\gamma'$; $\gamma = 180° - \gamma'$. A háromszög belső szögeinek összege: $2\gamma' + 3\gamma' + 180° - \gamma' = 180 \Rightarrow \gamma' = 0°$. Ilyen háromszög nem létezik.

95. A feladat feltételei szerint $\alpha' = 128° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 52°}}$; és $\beta' = 116° \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 64°}}$. A belső szögek összegéből: $\gamma = 180° - 52° - 64° = 64°$.

96. Az adott szög a szárszög külső szöge, mivel alapon fekvő szög csak hegyesszög lehet, és ahhoz tompaszög a külső szög. $\gamma' = 87° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 93°}}$ a háromszög szárszöge. Az alapon fekvő szögek: $\alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{43{,}5°}}$.

97. *a)* **1. eset:** Az adott szög a szárszög külső szöge: $\gamma' = 96° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 84°}} \Rightarrow \alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{48°}}$.

2. eset: Az adott szög az alapon fekvő egyik szög külső szöge: $\alpha' = 96° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 84°}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 84°}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 84° = \underline{\underline{12°}}$.

b) 64°-os szög csak szárszög külső szöge lehet, mivel hozzá tompaszög tartozik belső szögként.
$\gamma' = 64° \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 116°}} \Rightarrow \alpha = \beta = \dfrac{\gamma'}{2} = \underline{\underline{32°}}$.

98. Legyen α és β szögfelezőjének metszéspontja P; az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge $\delta \Rightarrow \delta = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\beta}{2} = \underline{\underline{90° - \dfrac{\gamma}{2}}}$.

99. Jelölje A_1 az A-ból induló, B_1 a B-ből induló magasság talppontját, M a két magasságvonal metszéspontját, $\delta \leq 90°$ a két magasságvonal hajlásszögét! δ az MBA_1 derékszögű háromszögben hegyesszög. γ és δ merőleges szárú szögek. *a)*, *b)* és *d)* esetben egyenlők, mert egyaránt hegyesszögek, *c)* esetben γ tompaszög, ezért γ és δ kiegészítő szögek.

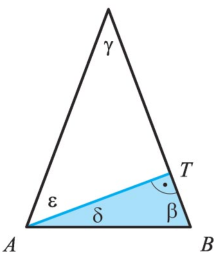
a) $\alpha = 22{,}5°$; $\beta = 75° \Rightarrow \gamma = 82{,}5° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 82{,}5°}}$ a hajlásszög.

b) $\alpha = 15°$; $\beta = 105° \Rightarrow \gamma = 60° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 60°}}$ a hajlásszög.

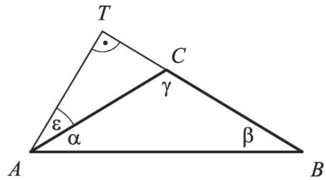
c) $\alpha = 30°$; $\beta = 45° \Rightarrow \gamma = 105° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 75°}}$ a hajlásszög.

d) $\alpha = 90°$; $\beta = 20° \Rightarrow \gamma = 70° \Rightarrow \underline{\underline{\delta = 70°}}$ a hajlásszög.

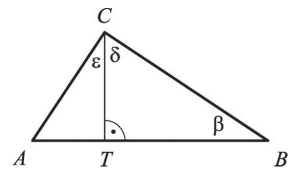
102.



103.



104.



100. *a)* Legyen a két szögfelező metszéspontja P és az $ABP\triangle$ P-nél lévő külső szöge δ!
$\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{47° \, 42'}{2} + \frac{73° \, 10'}{2} = \underline{\underline{60° \, 26'}}$;
b) Legyen a magasságok talppontja A_1, illetve B_1, metszéspontjuk M! Az m_a és m_b magasságvonalak szöge a B_1MA_1C húrnégyszög M-nél levő külső szöge: $\delta = \gamma = 180° - 47° \, 42' - 73° \, 10' = \underline{\underline{59° \, 8'}}$.

101. Legyen az α szögfelezőjének a BC oldallal vett metszéspontja P. Az $APB\triangle$-ben δ a P-nél levő külső szög. $\delta = \frac{\alpha}{2} + \beta = 97° \, 1'$. A hajlásszög $180° - \delta = 180° - 97° \, 1' = \underline{\underline{82° \, 59'}}$.

102. Az $ABC\triangle$-ben: $\alpha = \beta = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. *a)* Az $ATB\triangle$ belső szögeinek összegéből: $\delta = 90° - \beta = \underline{\underline{15°}}$ a szárhoz tartozó magasságvonal és az alap által bezárt szög. *b)* $\varepsilon = \alpha - \delta = \underline{\underline{60°}}$ a szárhoz tartozó magasságvonal és a másik szár által bezárt szög.

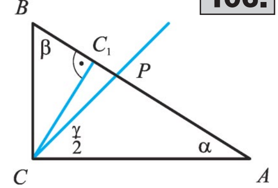
103. **1. eset:** A szárszög hegyesszög. A 102. ábra jelöléseit használva:
A feladat feltételeiből $\alpha = \beta$; $\varepsilon = \alpha - 13°$; és $\varepsilon + \delta = \alpha \Rightarrow \delta = 13°$.
$ATB\triangle$-ből $\beta = 90° - 13° = \underline{\underline{77°}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 77°}} \Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 77° = \underline{\underline{26°}}$.
2. eset: A szárszög tompaszög. A feladat feltételeiből $\alpha = \beta$ és $\varepsilon = \alpha - 13°$; $ATB\triangle$-ből $\alpha + \varepsilon + 90° + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \alpha - 13° + 90° + \alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 34° \, 20'}}$; $\underline{\underline{\beta = 34° \, 20'}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma = 180° - 2 \cdot 34° \, 20' = \underline{\underline{111° \, 20'}}$.

104. $BTC\triangle$-ből $\delta = 90° - \beta = \underline{\underline{63°}}$; $ACB\sphericalangle = 90° \Rightarrow \varepsilon = 90° - \delta = \underline{\underline{27°}}$.

105. Hegyesszögű, tompaszögű, valamint olyan derékszögű háromszög esetén, aminek a vagy b az átfogója, a vizsgált szögek merőleges szárú hegyesszögek, tehát egyenlők. Abban az esetben, ha a és b a derékszögű háromszög befogói: $\sphericalangle(a; m_b) = \sphericalangle(b; m_a) = 0°$.

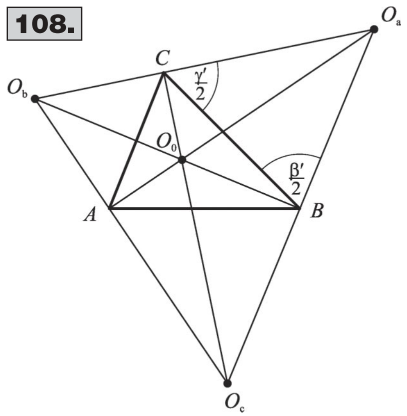
106. **1. eset:** A háromszög befogói különbözők, így feltehető, hogy
$\beta > \alpha \Rightarrow C_1 \in BP$;
$BC_1C\triangle$-ből $BCC_1\sphericalangle = 90° - \beta$. A szögfelezés miatt $BCP\sphericalangle = 45°$.
$C_1CP\sphericalangle = 45° - (90° - \beta) = \underline{\underline{\beta - 45°}}$.
2. eset: A háromszög egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow \alpha = \beta = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow P \equiv C_1 \Rightarrow C_1CP\sphericalangle = 0°$, amire teljesül, hogy 45°-kal kisebb, mint a 45°-os hegyesszögek.

106.

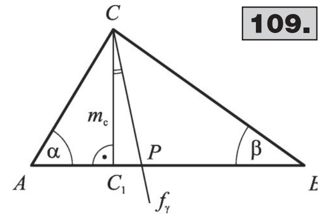


I

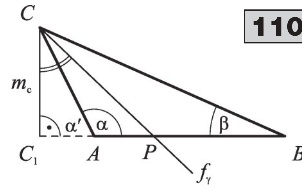
108.



109.



110.



107. Legyen α a külső szögfelezők metszéspontja, ε pedig az $AQB\triangle$ Q-nál lévő belső szöge.
$AQB\triangle$-ben $\varepsilon = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2} + 90° - \frac{\beta}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}}} < 90°$ a külső szögfelezők hajlásszöge.

108. $BCO_a\triangle$-ben $BCO_a\sphericalangle = \frac{\gamma'}{2}$ a 108. ábra jelölései szerint.
$\underline{\underline{CBO_a\sphericalangle}} = \frac{\beta'}{2} \Rightarrow CO_aB\sphericalangle = 180° - \frac{\gamma'}{2} - \frac{\beta'}{2} = 180° - \frac{360° - \alpha'}{2} = \frac{\alpha'}{2} = \underline{\underline{90° - \frac{\alpha}{2}}}.$
Hasonlóan belátható, hogy $\underline{\underline{CO_bA\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}}}$ és $\underline{\underline{AO_cB\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2}}}$.

109. Legyen a 109. ábra jelölései szerint $\alpha = 67°$; $\beta = 33° \Rightarrow \gamma = 80°$; $\alpha > \beta$ miatt $C_1 \in AP$.
$C_1CP\sphericalangle = \frac{\gamma}{2} - (90° - \alpha) = \underline{\underline{17°}}.$

110. **1. eset:** $0° < \beta < \alpha < 90°$. A 109. ábra jelöléseit használva: $\beta < \alpha \Rightarrow C_1 \in AP \Rightarrow C_1CP\sphericalangle =$
$= \frac{\gamma}{2} - (90° - \alpha) = \frac{180° - \alpha - \beta}{2} - (90° - \alpha) = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}.$

2. eset: $\alpha = 90°$. $A \equiv C_1$; $C_1CP\sphericalangle = \frac{90° - \beta}{2} = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}.$

3. eset: $\alpha > 90°$ (110. ábra). $C_1CP\sphericalangle = \frac{\gamma}{2} + 90° - \alpha' = \frac{180° - \alpha - \beta}{2} + \alpha - 90° = \underline{\underline{\frac{\alpha - \beta}{2}}}.$

111. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC oldallal P! $APB\sphericalangle$ külső szög az $APC\triangle$-ben $\Rightarrow APB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \gamma$; $APC\sphericalangle$ külső szög az $APB\triangle$-ben $\Rightarrow APC\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \beta$;
$|APB\sphericalangle - APC\sphericalangle| = \left|\frac{\alpha}{2} + \gamma - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\right| = \underline{\underline{|\gamma - \beta|}}.$

112. Az ABC egyenlő szárú háromszög γ szárszögének felezője merőlegesen felezi az AB alapot F-ben. Ez azt jelenti, hogy a szárszög az $AFC\sphericalangle = 90°$-kal egyenlő. $\underline{\underline{\gamma = 90°}}$;
$\alpha = \beta = \frac{180° - 90°}{2} = \underline{\underline{45°}}.$

113. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC szárral P! Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összegéből: $\alpha = \frac{180° - 36°}{2} = 72° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 36° \Rightarrow APB\sphericalangle = ABP\sphericalangle = 72° \Rightarrow ABP\triangle$ egyenlő szárú. $ACP\sphericalangle = \gamma = 36° = \frac{\alpha}{2} = CAP\sphericalangle \Rightarrow APC\triangle$ egyenlő szárú.

114. Legyen az α szögfelezőjének metszéspontja a BC szárral P! $AP = AB \Rightarrow APB\sphericalangle = ABP\sphericalangle = \alpha$. Az $APB\triangle$ belső szögeinek összege: $\alpha + \frac{\alpha}{2} + \alpha = 180° \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 72°}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 36°}}$. A háromszög szögei: 72°; 72°; 36°.

115. A színessel húzott szakaszok és az α szögszárai által határolt egyenlő szárú háromszögekre többször alkalmazva a háromszög külső és belső szögeire vonatkozó összefüggéseket: $\underline{\underline{\beta = 75°}}$.

116. *a)* A töröttvonal egyes szakaszai az adott szög száraival rendre 15°-kal nagyobb szögeket zárnak be. 15°; 30°; 45°; 60°; 75° az egymást követő szögek nagysága. Ezeket követné a 90°, ami lezárja a sort, mert a következő háromszögnek már nem lehet 2 db 90°-os szöge.
b) n szakasz esetén $\beta = (n-1)\cdot\alpha$. 10 egyenlő szakasz fér el, ha $90° > 9\alpha \Rightarrow \underline{\underline{10° > \alpha}}$. 10°-nál kisebbnek kell választani α-t.
c) $(n+1)$ szakasz esetén $\beta = n\cdot\alpha$. $(n+1)$ egyenlő szakasz fér el, ha $90° > n\cdot\alpha \Rightarrow \underline{\underline{\frac{90°}{n} > \alpha}}$.

117. $ADC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 67{,}5°$. $CEB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CEB\sphericalangle = ECB\sphericalangle = 67{,}5°$. $ADC\sphericalangle = 67{,}5° = CEB\sphericalangle \Rightarrow EDC\triangle$ egyenlő szárú, alapon fekvő szögei 67,5°-osak. Szárszöge $ECD\sphericalangle = 180° - 2\cdot 67{,}5° = \underline{\underline{45°}}$.

118. $ABD\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow ABC\sphericalangle = ADB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{180° - \alpha}{2}}}$. $CEB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CBE\sphericalangle = CEB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{180° - \gamma}{2}}}$. $DEB\triangle$-ben a belső szögek összege: $DBE\sphericalangle + \frac{180° - \alpha}{2} + \frac{180° - \gamma}{2} = 180° \Rightarrow DBE\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}}}$.

119. *a)* **1. eset:** $AB = AC$. Egyenlő szárú háromszögben a szárszög belső szögfelezője merőleges az alapra, külső szögfelezője pedig párhuzamos vele. Így nem jöhet létre az E pont, és az $AD = AE$ állítás sem teljesülhet.
2. eset: $AB > AC$. $AB > AC \Rightarrow B, D, C, E$ a pontok sorrendje. $AD = AE$ és AD merőleges AE miatt az $ADE\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow ADE\sphericalangle = 45°$. $ADE\sphericalangle$ külső szöge az $ABD\triangle$-nek $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \beta = 45°}} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma}} = 180° - \alpha - \beta = 180° - (90° - 2\beta) - \beta = \underline{\underline{90° + \beta}}$.
3. eset: $AB < AC$. $AB < AC \Rightarrow E, B, D, C$ a pontok sorrendje. $AD = AE$ és AD merőleges AE miatt az $ADE\triangle$ egyenlő szárú derékszögű $\Rightarrow ADE\sphericalangle = 45°$. $ADE\sphericalangle$ külső szöge az $ACD\triangle$-nek $\Rightarrow \underline{\underline{\frac{\alpha}{2} + \gamma = 45°}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta}} = 180° - \alpha - \gamma = 180° - (90° - 2\gamma) - \gamma = \underline{\underline{90° + \gamma}}$.
b) $\gamma = 34°$ esetén a $\gamma = 90° + \beta$ egyenlőség nem teljesülhet, így $AB < AC$ összefüggés áll fenn az oldalak között $\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 22°}}$; $\underline{\underline{\beta = 124°}}$.

I

120. $AB = AC \Rightarrow ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. $AD = AC$ és α a $DAC\triangle$ külső szöge $\Rightarrow$
$\Rightarrow ADC\sphericalangle = ACD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$. $\underline{\underline{BCD\sphericalangle}} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \underline{\underline{90^\circ}}$.

121. $AB + AC > BC \Rightarrow B, F, E, C$ a pontok sorrendje. $AB = BE \Rightarrow BEA\sphericalangle = BAE\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. $AC = CF \Rightarrow FAC\sphericalangle = AFC\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. $ECA\triangle$ E-nél fekvő külső szöge $FEA\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. A külső szög tétel miatt $FEA\sphericalangle = ECA\sphericalangle + EAC\sphericalangle \Rightarrow 90^\circ - \frac{\beta}{2} = \gamma + EAC\sphericalangle \Rightarrow$
$\Rightarrow EAC\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma \Rightarrow FAE\sphericalangle = FAC\sphericalangle - EAC\sphericalangle = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma\right) =$
$= \underline{\underline{\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}}$.

122. Legyen a szögfelező metszéspontja AB-vel P; az A-ból húzott párhuzamos metszéspontja a BC egyenessel pedig Q! $PC \parallel AQ \Rightarrow BCP\sphericalangle = BQA\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mert egyállású szögek. $PC \parallel AQ \Rightarrow$
$\Rightarrow PCA\sphericalangle = CAQ\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, mert váltószögek. Az állításokból $\Rightarrow$ $CAQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CA = CQ$.

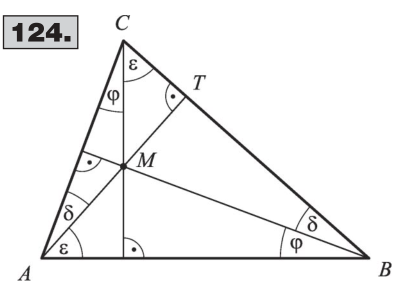
123. Legyen a szögfelező metszéspontja AB-vel Q. A $PAC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $\gamma \Rightarrow$
$\Rightarrow PAC\sphericalangle = APC\sphericalangle = \delta = \frac{\gamma}{2}$. A szögfelezés miatt $BCQ\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$. Mivel Q és A a PB egyenes által határolt ugyanazon félsíkban találhatók, $APC\sphericalangle = QCB\sphericalangle$ egyállású szögek $\Rightarrow AP \parallel QC$.

124. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\delta + 2\varphi + 2\varepsilon = 180^\circ \Rightarrow \delta + \varphi + \varepsilon = 90^\circ$. Az $ABT\triangle$ belső szögeinek összege: $\delta + \varphi + \varepsilon + ATB\sphericalangle = 180^\circ \Rightarrow ATB\sphericalangle = 90^\circ \Rightarrow AT \perp CB \Rightarrow AT$ magasságvonal az $ABC\triangle$-ben. Hasonlóan belátható az állítás a többi szakaszra is.

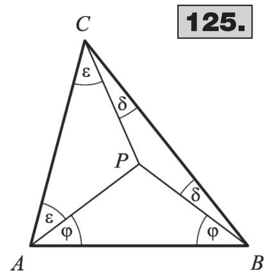
125. $AP = PB \Rightarrow APB\sphericalangle = 180^\circ - 2\varphi$. $BP = PC \Rightarrow BPC\sphericalangle = 180^\circ - 2\delta$. $CP = PA \Rightarrow CPA\sphericalangle = 180^\circ - 2\varepsilon$. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\varphi + 2\delta + 2\varepsilon = 180^\circ$. Felhasználva az $\alpha = \varepsilon + \varphi$ egyenlőséget $2\delta = 180^\circ - 2\alpha$ adódik. $BPC\sphericalangle = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = \underline{\underline{2\alpha}}$. Hasonlóan belátható, hogy $APB\sphericalangle = \underline{\underline{2\gamma}}$ és $CPA\sphericalangle = \underline{\underline{2\beta}}$.

126. Legyen F az AB oldal felezéspontja és $AB = 2CF$! $BCF\triangle$ és $ACF\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow$
$\Rightarrow CAF\sphericalangle = ACF\sphericalangle = \delta$ és $FCB\sphericalangle = CBF\sphericalangle = \varepsilon$. Az $ABC\triangle$ belső szögeinek összege: $2\delta + 2\varepsilon = 180^\circ \Rightarrow \delta + \varepsilon = 90^\circ \Rightarrow \underline{\underline{ACB\sphericalangle = 90^\circ}}$.

124.

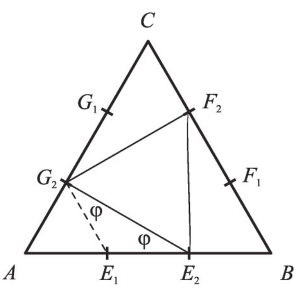


125.

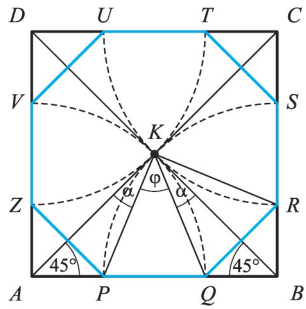


I

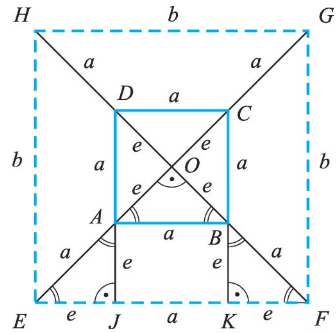
128.



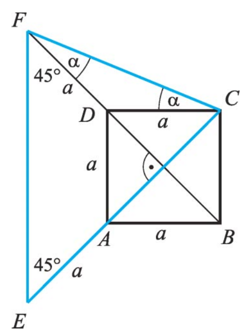
129.



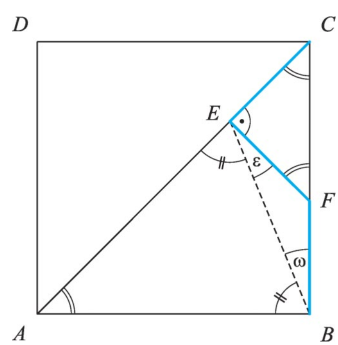
130.



131.



132.



127. Legyen az $ABC\triangle$ alapja AB, a meghosszabbítással nyert pont C^*! A háromszög egyenlő szárú $\Rightarrow CAB\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \alpha$; $CB = CC^* \Rightarrow CC^*B\sphericalangle = CBC^*\sphericalangle = \varepsilon$. $ABC^*\triangle$-ben

$\alpha + (\alpha + \varepsilon) + \varepsilon = 180° \Rightarrow \alpha + \varepsilon = 90° \Rightarrow ABC^*\sphericalangle = 90°$.

128. A harmadszakaszok egyenlősége miatt $G_2A = AE_1$; $ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow G_2AE_1\sphericalangle = 60°$. A két megállapításból következik, hogy az $AE_1G_2\triangle$ szabályos $\Rightarrow G_2E_1 = E_1A = E_1E_2 \Rightarrow GE_1E_2\triangle$ egyenlő szárú, szárszögének külső szöge $60° \Rightarrow \varphi = 30° \Rightarrow AG_2E_2\sphericalangle = 60° + 30° = 90°$. Az állítás a többi szögre is hasonlóan belátható.

129. KQ a 45°-os középponti szögű $AC : 2$ sugarú AQK körcikk húrja. KP a 45°-os középponti szögű $BD : 2 = AC : 2$ sugarú körcikk húrja. $\Rightarrow KP = KQ$ (1). Hasonlóan: $KP = KR = KS = \ldots = KZ$. $AKQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \alpha + 45° = \alpha + \varphi \Rightarrow \varphi = 45°$ (2); $AKB\sphericalangle = 90° \Rightarrow \alpha = 45° : 2$ és $QKR\sphericalangle = 2 \cdot \alpha = 45°$ (3). Az (1), (2) és (3) állításokból következik, hogy a $PQR\ldots Z$ nyolcszög szabályos, mert K középpontú 45°-os forgásszimmetriája van.

130. A meghosszabbítással egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszögek keletkeznek: $ABO\triangle \cong FBK\triangle \cong EAJ\triangle \Rightarrow EF = EJ + JK + KF = \underline{a + 2e}$ a keletkezett négyzet oldala.

131. $FD = DC = a \Rightarrow FDC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow DFC\sphericalangle = FCD\sphericalangle = \alpha$; $EFC\triangle$-ben $EFC\sphericalangle = 45° + \alpha$; $FCE\sphericalangle = 45° + \alpha \Rightarrow EFC\sphericalangle = FCE\sphericalangle \Rightarrow ECF\triangle$ egyenlő szárú.

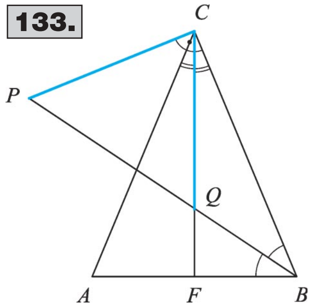
132. Az $ABC\triangle$ egyenlő szárú derékszögű:

$CAB\sphericalangle = ECF\sphericalangle = 45° \Rightarrow EFC\sphericalangle = 45° \Rightarrow \underline{\underline{CE = EF}}$;

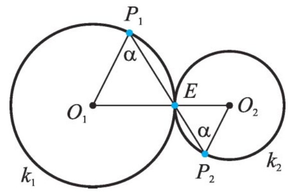
$AB = AE \Rightarrow ABE\sphericalangle = AEB\sphericalangle = 67{,}5° \Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon = \omega = 90° - 67{,}5° = 22{,}5° \Rightarrow \underline{\underline{EF = FB}}$.

133.



134.



133. $PCB\triangle$ derékszögű és $PBC\sphericalangle = \frac{\beta}{2} \Rightarrow CPB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. $ABC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow CF$ merőlegesen felezi AB-t $\Rightarrow FBQ\triangle$ derékszögű $\Rightarrow FQB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. $PQC\sphericalangle$ és $FQB\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow PQC\sphericalangle = FQB\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2}$. Az állításokból $CPQ\sphericalangle = PQC\sphericalangle = 90° - \frac{\beta}{2} \Rightarrow CPQ\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow \underline{\underline{CP = CQ}}$.

134. $O_1P_1P_2\sphericalangle = O_2P_2P_1\sphericalangle = \alpha$, mert váltószögek. $O_1P_1E\sphericalangle = O_1EP_1\sphericalangle = \alpha$, mert $O_1P_1E\triangle$ egyenlő szárú. $O_2P_2E\sphericalangle = O_2EP_2\sphericalangle = \alpha$, mert $O_2P_2E\triangle$ egyenlő szárú. $O_1EP_1\sphericalangle = O_2EP_2\sphericalangle = \alpha$.
O_1, E, O_2 egy egyenesen van és P_1, P_2 az O_1O_2 egyenes által határolt más-más félsíkban van $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1EP_1\sphericalangle$ és $O_2EP_2\sphericalangle$ csúcsszögek $\Rightarrow$ másik száruk is egy egyenesen van $\Rightarrow P_1, E, P_2$ egy egyenesen vannak.

135. $XAC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $CAB\sphericalangle = \alpha \Rightarrow CXA\sphericalangle = XCA\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\alpha}{2}}}$. $YBC\triangle$ egyenlő szárú, külső szöge $ABC\sphericalangle = \beta \Rightarrow BYC\sphericalangle = YCB\sphericalangle = \underline{\underline{\frac{\beta}{2}}}$. $XCY\sphericalangle = XCA\sphericalangle + ACB\sphericalangle + BCY\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\beta}{2} = \gamma + \frac{180° - \gamma}{2} = \underline{\underline{90° + \frac{\gamma}{2}}}$.

136. $DOA\sphericalangle = OAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, mert váltószögek $\Rightarrow DOA\triangle$ egyenlő szárú, mert két szöge $\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{DA = DO}$. $EOB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, mert váltószögek $\Rightarrow EBO\triangle$ egyenlő szárú, mert két szöge $\frac{\beta}{2} \Rightarrow \underline{EB = EO}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow DE = DO + OE = DA + EB$.

Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

137. Legyen T a P külső pontból az e egyenesre állított merőleges talppontja! Legyen $Q \neq T$ az „e” egyenes tetszőleges pontja! A PQT derékszögű háromszögben PQ átfogó, PT befogó. Mivel a legnagyobb szöggel szemben van a legnagyobb oldal, így $PQ > PT$. Tehát a lehetséges összekötő szakaszok közül PT a legrövidebb.

138. Az $ABC\triangle$ C derékszögű csúcsának vetülete az átfogóra T. ATC derékszögű háromszögben AC átfogó nagyobb, mint AT befogó: $\underline{\underline{AC > AT}}$. BTC derékszögű háromszögben BC átfogó nagyobb, mint BT befogó: $\underline{\underline{BC > BT}}$.