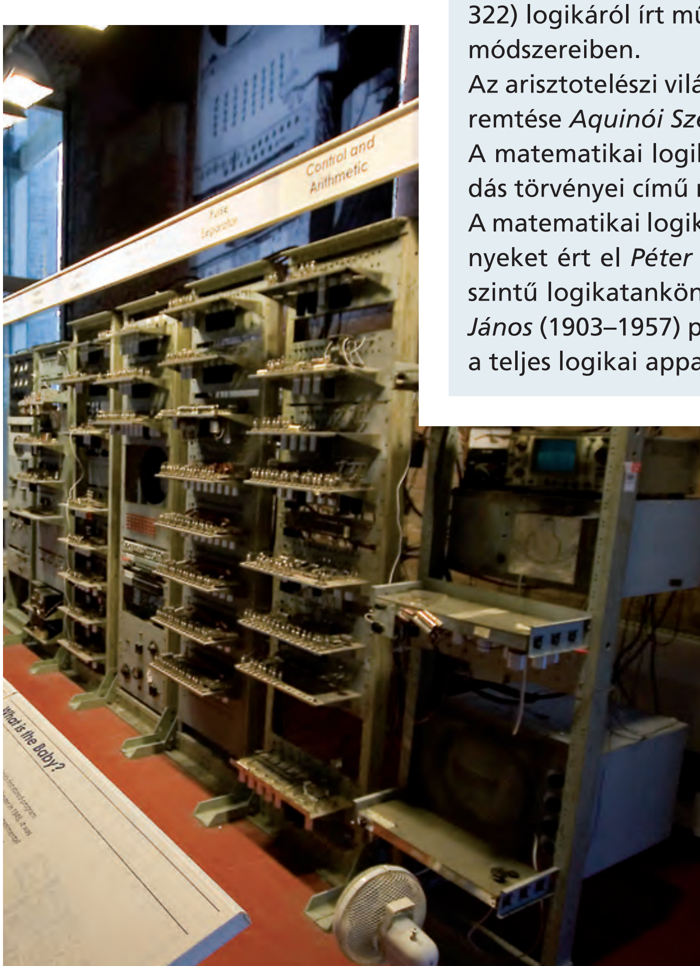
I. Matematikai logika

Az előző években már hallhattunk róla, hogy a gondolkodás tudománya – a logika – már az ókorban is megjelent, mert a tudományok fejlődése szükségessé tette. Fontossága miatt itt is utalunk *Arisztotelész* (Kr. e. 384–322) logikáról írt művére. Ezután hosszú ideig nem volt változás a logika módszereiben.

Az arisztotelészi világkép és a keresztény teológia összhangjának megteremtése *Aquinói Szent Tamás* (1225–1274) nevéhez fűződik.

A matematikai logika kialakítása *Georg Boole* (1815–1864) A gondolkodás törvényei című munkájával kezdődik el.

A matematikai logika területén már az 1930-as években jelentős eredményeket ért el *Péter Rózsa* (1905–1977), világszerte megjelenik egyetemi szintű logikatankönyvekben *Kalmár László* (1905–1976) neve, *Neumann János* (1903–1957) pedig az első elektronikus számítógép megépítéséhez a teljes logikai apparátust felhasználta.



1. A matematikai logika alapfogalmai

Az elmúlt években már elkezdtünk ismerkedni a matematikai logika alapfogalmaival. Fontosságuk miatt a középiskolai tanulmányaink végéhez közeledve ezeket felelevenítjük és kiegészítjük.

A matematikai logikában a kijelentő mondatoknak kiemelkedő szerepe van, ezek között is azoknak, amelyekről eldönthető, hogy igazak vagy hamisak.

Állítás

Állításnak (kijelentésnek, ítéletnek) nevezzük azt a kijelentő mondatot, melyről egyértelműen eldönthető, hogy vagy igaz, vagy hamis.

Állítás logikai értéke

Egy állítással kapcsolatban az *igaz*at, a *hamis*at az állítás logikai értékének nevezzük.

Állítás logikai értéke

$|A| = i$

$|B| = h$

Ezeket a kijelentő mondatokat röviden egy-egy nagybetűvel fogjuk jelölni.
Az A állítás logikai értéke igaz. Rövid jelöléssel: $|A| = i$.
A B állítás logikai értéke hamis. Rövid jelöléssel: $|B| = h$.

1. példa Adjuk meg a logikai értékét a következő állításoknak!
A: Az 1111 hárommal osztható szám.
B: Ma december első napja van.
C: Most itt esik az eső.
D: Van páros prímszám.
E: Végtelen sok olyan prímszám van, amely egy négyzetszámnál 1-gyel nagyobb.

Megoldás
Az A állítás hamis, a D igaz. A bevezetett jelöléseinkkel: $|A| = h$, $|D| = i$.
A B és a C állítás logikai értékét a könyvben nem tudjuk megadni, de az olvasó a szöveg olvasásának pillanatában eldöntheti, hogy igaz vagy hamis állításról van-e szó.
Előfordulhat, hogy bizonyos kijelentésekről egyértelműen látható, hogy vagy igaz, vagy hamis lehet a logikai értéke, de mi ezt nem tudjuk. Az E kijelentő mondat is ilyen. (Ezt is állításnak tartjuk.)

2. példa Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e!
A: Hol születtél?
B: Vigyázat, nem ivóvíz!
C: Adjuk össze az egész számokat 1-től 50-ig!
D: Van egy üres füzeted?
E: Kérlek, ismételd meg!
F: Megette az ebédet.
G: Móricz Zsigmond legjobb novellája a *Barbárok*.
H: Holnap finom lesz az ebéd.

Megoldás
A fenti mondatok közül a nem kijelentők nem lehetnek állítások: A, B, C, D, E.

Az *F* kijelentő mondat hiányos. Nem tudjuk, hogy kiről van szó. Meghatározhatatlan a logikai értéke.
A *G* kijelentő mondatban a legjobb novella nem definiálható. Ezzel a kijelentéssel lehet egyetérteni és lehet vitatkozni. Vagyis bizonytalan a jelentése.
A *H* nyelvtani értelemben kijelentő mondat. A mondatban rejlő bizonytalan jelentésű „finom" szó miatt nem eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
Vagyis ezen mondatok egyike sem állítás.

Egyszerű állítás

Egyszerű állításoknak nevezzük az olyan kijelentéseket, amelyek nem bonthatók fel részekre.

Egyszerű állítás

Például:
Esik az eső.
A 6 páros szám.

Összetett állítás

Összetett állításoknak nevezzük az olyan kijelentéseket, amelyek egyszerű állítások összekapcsolásával megfogalmazhatók.

Összetett állítás

Például:
Zenét hallgatok és rendet rakok az asztalomon.
Ha elkészítettem a házi feladataimat, akkor beszélek az osztálytársammal.

3. példa Milyen egyszerű állítások összekapcsolásával kaptuk a következő összetett állításokat?
A: Kutyát sétáltatok és üzenetet küldök a testvéremnek vagy megöntözöm a virágokat.
B: Ma meglátogatom a nagyszüleimet és elviszem nekik a kért könyvet.
C: Ha ma délután süt a nap, akkor elmegyek vásárolni.

Megoldás
Az *A* összetett állítás a következő egyszerű állításokból rakható össze:
D: Kutyát sétáltatok.
E: Üzenetet küldök a testvéremnek.
F: Megöntözöm a virágokat.

A *B* összetett állítás a következő egyszerű állításokból rakható össze:
G: Ma meglátogatom a nagyszüleimet.
H: Elviszem a nagyszüleimnek a kért könyvet.

A *C* összetett állítás a következő egyszerű állításokból rakható össze:
J: Ma délután süt a nap.
K: Ma délután elmegyek vásárolni.

Feladatok

1. K1 Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e!
A: Mély víz!
B: Hányas cipőt keres?
C: Erre futott.

D: Számítsuk ki a 3 cm oldalhosszúságú négyzet kerületét!
E: Ez jó minőségű mosópor?
F: Holnap nem lesz szeles az idő.

2. K1 Döntsük el a következő mondatokról, hogy állítások-e! Állítás esetén adjuk meg a logikai értékét!
A: A lónak négy lába van.
B: Miből lesz a cserebogár?
C: A botnak két vége van.
D: Nem cseresznyéztünk egy tálból.
E: Éhes csikó abrakkal álmodik.
F: Hogy kerül a csizma az asztalra?

3. K1 Adjuk meg a logikai értékét a következő állításoknak!
A: Az 1001 prímszám.
B: A 2821 osztható 7-tel.
C: A hatszögek minden szöge 120°-os.
D: A százlábúnak 100 lába van.
E: Miskolc megyeszékhely.
F: *Zavaros, bölcs és nagy volt a Duna*, írja József Attila az egyik versében.
G: Debrecen telefonos előhívószáma 52.
H: A palpigradi nyolclábú állat.
A döntésekhez használhatunk szakirodalmat, világhálót!

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 1–18.

4. K1 Milyen egyszerű állítások összekapcsolásából kaphatók a következő összetett állítások?
A: És elkezdett az eső csepeerészni, de … el is állt.
B: Hiába fürdik a csóka, nem lesz fehér holló soha.
C: Ha a Pál kéménye füstöl, Péter attól mindjár' tüszköl.
D: A seb beforr, de a helye megmarad.

2. Logikai műveletek

Tudjuk, hogy az állítás tagadásával egy új állítást hozunk létre. Azt is láttuk, hogy egyszerű állítások valamilyen nyelvtani összekapcsolásával új állításokat alkotunk. A következőkben néhány ilyen esetet fogunk megvizsgálni.

A matematikaórákon a helyes következtetések megtalálása kulcsfontosságú. Természetesen ezt minden tudomány, de a köznapi gondolkodás is igényli. A matematikai logika a helyes következtetések megtalálását is a céljai közé sorolja. Mutatunk a matematikaórákról két példát, amelyeket helyes következtetésnek tartunk.

1. Ha egy egész szám osztható kettővel és osztható öttel, akkor az utolsó számjegye 0.
   Ez az egész szám nem osztható öttel.
   Tehát ez az egész szám nem végződhet 0-ra.
2. Ha egy négyszögnek van 90°-os szöge és középpontosan szimmetrikus, akkor ez a négyszög téglalap.
   Ez a négyszög nem középpontosan szimmetrikus.
   Tehát ez a négyszög nem téglalap.

A tartalmában nagyon eltérő, de szerkezetében megegyező következtetéseket röviden le tudjuk jegyezni. Ilyen módon a következtetés szerkezete jobban látható lesz:
Ha *A* és *B*, akkor *C*.

Nem *B*.
Tehát nem *C*.

A szokásos módon az állításokat nagybetűkkel jelöltük. Ezek logikai értéke vagy igaz, vagy hamis. Megtalálhatók a szövegben az úgynevezett logikai kapcsolószavak: *nem*; *és*; *ha …*, *akkor …* Ezek a szavak **logikai műveleteket** jelölnek. A logikai műveletek segítségével egyszerű állításokból **összetett állítások** készíthetők.

Elevenítsük fel a már tanult, és gyakran előforduló logikai műveleteket!

I. A tagadást szakszóval **negációnak** nevezzük.

Negáció (tagadás)

Egy tetszőleges *P* állítás negációján (tagadásán) a *nem P* (*nem igaz, hogy P*) állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.

Negáció (tagadás)

A *P* állítás negációjának jelölését már korábban bevezettük: $\neg P$ (olvasd: *nem P*).

1. példa Adjuk meg a következő állítások logikai értékét:
A: A keresztespók rovar.
B: A keresztespók nem rovar.
C: A 403 összetett szám.
D: A 403 nem összetett szám.

Megoldás
$|A| = h$;
$|B| = i$;
$|C| = i$;
$|D| = h$.

A példában tapasztaltakat általánosságban így fogalmazhatjuk meg:
Ha a *P* állítás igaz, akkor a *P* negáltja (a *nem P*) hamis.
Ha a *P* állítás hamis, akkor a *P* negáltja (a *nem P*) igaz.

A negáció műveletét a következő értéktáblázat definiálja:

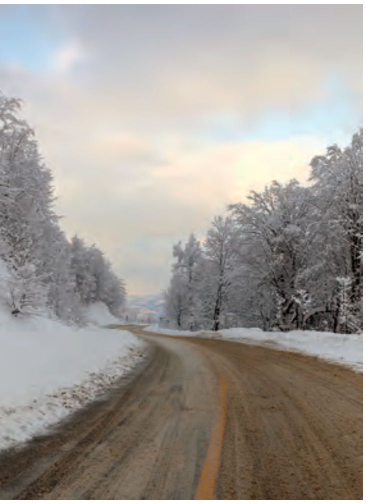
P	$\neg P$
i	$\boldsymbol{h}$
h	$\boldsymbol{i}$

A negáció ismeretében könnyen belátható a **kettős tagadás törvénye**: $\neg(\neg P) = P$.

A kettős tagadás törvénye

Vagyis a következő két állításnak a logikai értéke egyenlő:
A: Olvastam a *Találkozás egy fiatalemberrel* című novellát.
B: Nem igaz, hogy nem olvastam a *Találkozás egy fiatalemberrel* című novellát.

Már az előző években is utaltunk rá, hogy ugyanazt a tartalmat kifejező mondatnak a beszélt nyelvben lehet eltérő jelentése, attól függően, hogy milyen nyomatékkal, milyen helyzetekben alkalmazzuk azt.



2. példa Adjuk meg a következő állítások tagadását!
A: Csúszósak az utak.
B: Minden tollamban kék színű tinta van.
C: Minden háznak van ablaka.
D: Van olyan háromszög, amelynek nincs hegyesszöge.

Megoldás
$\neg A$: Nem igaz, hogy csúszósak az utak. Vagyis: Nem csúszósak az utak.
$\neg B$: Nem igaz, hogy minden tollam kéket fog. Vagyis: Van nem kéket fogó tollam.
$\neg C$: Nem igaz, hogy minden háznak van ablaka. Vagyis: Van olyan ház, amelyiknek nincs ablaka.
$\neg D$: Nem igaz, hogy van olyan háromszög, amelynek nincs hegyesszöge. Vagyis: Minden háromszögnek van hegyesszöge.

II. Két állítást összekapcsolhatunk az ***és*** kötőszóval. Ez a logikai művelet a **konjunkció**.

Konjunkció

Konjunkció

Tetszőleges *P*, *Q* állítások konjunkcióján a *P és Q* állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.

$P \wedge Q$

A *P* és a *Q* állítás konjunkciójának jelölése: $P \wedge Q$ (olvasd: *P* és *Q*).

3. példa Adjuk meg a következő összetett állítások logikai értékét! Fogalmazzuk meg, hogy milyen egyszerű állítások összekapcsolásával kaptuk ezeket az állításokat, és adjuk meg ezeknek is a logikai értékét!
A: A kör leghosszabb húrja az átmérő, és a kerülete az átmérő és a π szorzatával egyenlő.
B: A 11 prímszám és a 111 osztható 11-gyel.
C: A –64-nek nem létezik a valós számok halmazán a köbgyöke és a négyzetgyöke.
D: A konvex ötszög belső szögeinek összege 360°, és a külső szögeinek összege pedig 540°.

Megoldás
|A kör leghosszabb húrja az átmérő.| = *i*,
|A kör kerülete az átmérő és a π szorzatával egyenlő.| = *i*.
Az összetett állítás logikai értéke: $|A| = i$.

|A 11 prímszám.| = *i*,
|A 111 osztható 11-gyel.| = *h*.
Az összetett állítás logikai értéke: $|B| = h$.

|A –64-nek nem létezik a valós számok halmazán a köbgyöke.| = h,
|A –64-nek nem létezik a valós számok halmazán a négyzetgyöke.| = i.
Az összetett állítás logikai értéke: |C| = h.

|A konvex ötszög belső szögeinek összege 360°.| = *h*.
|A konvex ötszög külső szögek összege 540°.| = *h*.
Az összetett állítás logikai értéke: $|D| = h$.

A *3. példában* látottak alapján a konjunkció értéktáblázata a következő:

P	Q	$P \wedge Q$
i	*i*	***i***
i	*h*	***h***
h	*i*	***h***
h	*h*	***h***

Vagyis a $P \wedge Q$ állítás pontosan akkor hamis, ha a két összetevő állítás közül legalább az egyik hamis. A $P \wedge Q$ állítás akkor és csak akkor igaz, ha mindkét összetevő állítás igaz.

III. Két egyszerű állítást összekapcsolhatunk a ***vagy*** kötőszóval is. Ez a logikai művelet a **diszjunkció**.

Diszjunkció

Tetszőleges P, Q állítások diszjunkcióján a *P vagy Q* állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.

Diszjunkció

A P és a Q állítás diszjunkciójának jelölése: $P \vee Q$ (olvasd: *P* vagy *Q*).

$P \vee Q$

A *vagy* kötőszó használatánál nagyon oda kell figyelnünk. A következő két állítás ezt mutatja meg.
A: László most elmosogatja a szennyes edényeket vagy rádiót hallgat.
A mondat szerint lehetséges, hogy László
1. elmosogatja a szennyes edényeket, de nem hallgat rádiót;
2. nem mosogatja el a szennyes edényeket, de rádiót hallgat;
3. a mosogatással egy időben rádiót is hallgat.
A *vagy* kötőszónak ez a használata a **megengedő vagy**.

Megengedő vagy

B: László most porszívózni fog a lakásban vagy elmegy bevásárolni.
A mondat értelméből következik, hogy László mindkettőt egyszerre nem teheti.
A *vagy* kötőszónak ez a használata a **kizáró vagy**.

Kizáró vagy

A diszjunkcióban a *megengedő vagy*-ot használjuk!

4. példa Adjuk meg a következő összetett állítások logikai értékét!
A: A 117-nek a 3 vagy a 13 osztója.
B: A 117-nek a 3 vagy a 17 osztója.
C: A 117-nek a 7 vagy a 13 osztója.
D: A 117-nek a 7 vagy a 17 osztója.

Megoldás

$|$A 117-nek a 3 osztója.$| = i$,
$|$A 117-nek a 13 osztója.$| = i$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|A| = i$.

$|$A 117-nek a 3 osztója.$| = i$,
$|$A 117-nek a 17 osztója.$| = h$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|B| = i$.

$|$A 117-nek a 7 osztója.$| = h$,
$|$A 117-nek a 13 osztója.$| = i$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|C| = i$.

$|$A 117-nek a 7 osztója.$| = h$,
$|$A 117-nek a 17 osztója.$| = h$.
Az összetett állítás logikai értéke: $|D| = h$.

A *4. példában* látottak alapján a diszjunkció értéktáblázata a következő:

P	Q	$P \vee Q$
i	*i*	***i***
i	*h*	***i***
h	*i*	***i***
h	*h*	***h***

Vagyis a $P \vee Q$ állítás pontosan akkor igaz, ha a két összetevő állítás közül legalább az egyik igaz. A $P \vee Q$ állítás akkor és csak akkor hamis, ha mindkét összetevő állítás hamis.

A matematikai logikában használatos állítások és a halmazok között nagyon sok és szoros kapcsolat van.

Egymásnak megfelelő fogalmak:
– állítások – alaphalmaz részhalmazai;
– állítások konjunkciója – halmazok metszete;
– állítások diszjunkciója – halmazok uniója;
– állítások tagadása – komplementer halmaz.

Egymásnak megfelelő műveletek:
– konjunkció – metszetképzés;
– diszjunkció – unióképzés;
– tagadás (negáció) – komplementerképzés.

Feladatok

1. K1 Igazoljuk értéktáblázattal, hogy a konjunkció kommutatív művelet, azaz: $P \wedge Q = Q \wedge P$!

2. K1 Igazoljuk értéktáblázattal, hogy a diszjunkció kommutatív művelet, azaz: $P \vee Q = Q \vee P$!

3. E1 Igazoljuk értéktáblázattal a következő de Morgan-féle azonosságokat:
a) $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
b) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.

4. E1 Tagadjuk a de Morgan-féle azonosságok felhasználásával a következő állításokat!
A: Tejet iszom vagy kiflit eszem.
B: Elmegyek sétálni és beszélgetek az ismerősömmel.
C: Elkészítem a házi feladatot és küldök egy üzenetet az osztálytársamnak.
D: Nem veszek zsömlét vagy veszek gyümölcslevet.

5. K2 Adjunk meg egy-egy matematikai állítást *A*-ra és *B*-re, hogy a következő összetett állítások igazak legyenek!
a) $(\neg A) \wedge B$; *b)* $(\neg A) \vee B$; *c)* $A \wedge (\neg B)$; *d)* $A \vee (\neg B)$.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 19–22.

6. K2 Adjunk meg egy-egy matematikai állítást *A*-ra és *B*-re, hogy a következő összetett állítások hamisak legyenek!
a) $(\neg A) \wedge (\neg B)$; *b)* $(\neg A) \vee (\neg B)$; *c)* $A \wedge (\neg B)$; *d)* $A \vee (\neg B)$.

3. Műveleti tulajdonságok

Ebben a leckében az $\wedge$, $\vee$, $\neg$ műveletek néhány tulajdonságát gyűjtjük össze.

Közvetlenül a műveletek definíciójának felhasználásával igazolható, hogy **a konjunkció és a diszjunkció kommutatív művelet.**
A bevezetett jelölésekkel ezt így írjuk: $P \wedge Q = Q \wedge P$, $P \vee Q = Q \vee P$.

Kettőnél több állítás konjunkcióját is értelmezhetjük.
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ állítások konjunkciója: $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$.
Ennek az összetett állításnak a logikai értéke akkor és csak akkor igaz, ha a konjunkció minden tagjának igaz a logikai értéke.
Az értelmezésből következik, hogy **a konjunkció asszociatív művelet**.
Jelöléseinkkel: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$.

Kettőnél több állítás diszjunkcióját is értelmezhetjük.
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ állítások diszjunkciója: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$.
Ennek az összetett állításnak a logikai értéke akkor és csak akkor igaz, ha a diszjunkció tagjai közül legalább egynek igaz a logikai értéke.
Az értelmezésből következik, hogy **a diszjunkció asszociatív művelet**.
Jelöléseinkkel: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C) = A \vee B \vee C$.

A negáció, konjunkció és diszjunkció közötti fontos azonosságok a **de Morgan-féle azonosságok**, amelyeknek igazolását logikai értéktáblázat segítségével az előző leckében feladatként már kitűztük:
$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$,
$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$.

De Morgan-féle azonosságok

1. példa Igazoljuk, hogy $|(\neg A) \vee A| = i$!

Megoldás
Készítsük el a logikai értéktáblázatot!

A	$\neg A$	$(\neg A) \vee A$
i	h	$\boldsymbol{i}$
h	i	$\boldsymbol{i}$

Az A logikai értékétől függetlenül $(\neg A) \vee A$ logikai értéke igaz. Ezzel igazoltuk az állítást.
Ez a logikai törvény **a harmadik kizárásának elve**.

A harmadik kizárásának elve

2. példa Igazoljuk, hogy $|(\neg A) \wedge A| = h$!

Megoldás
Készítsük el a logikai értéktáblázatot!

A	$\neg A$	$(\neg A) \wedge A$
i	h	$\boldsymbol{h}$
h	i	$\boldsymbol{h}$

Az A logikai értékétől függetlenül $(\neg A) \wedge A$ logikai értéke hamis. Ezzel igazoltuk az állítást.
Ez a logikai törvény az **ellentmondás-mentesség elve**.

Ellentmondás-mentesség elve

Az eddigiekben az állításokat elvonatkoztattuk a kijelentő mondatok tartalmától, és csak a logikai értékük volt fontos. Az állítások helyett a logikai értékükkel is végezhetünk műveleteket:

Műveletek az állítások logikai értékével

$\neg i = h$; $\neg h = i$;
$i \wedge i = i$; $i \wedge h = h$; $h \wedge i = h$; $h \wedge h = h$;
$i \vee i = i$; $i \vee h = i$; $h \vee i = i$; $h \vee h = h$.

3. példa Legyen a *P* állítás logikai értéke *p* (ahol *p* lehetséges értéke *i* vagy *h*). Igazoljuk, hogy
a) $p \wedge h = h$;
b) $p \vee i = i$!

Megoldás
a) Mivel $i \wedge h = h$, valamint $h \wedge h = h$, így az állítás valóban teljesül.
b) Mivel $i \vee i = i$, valamint $h \vee i = i$, így ez az állítás is teljesül.

4. példa Vizsgáljuk meg az $A \vee (B \wedge C)$, valamint az $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ állítások logikai értékét! Azonos minden esetben?

Megoldás
Minden állítás logikai értéke igaz vagy hamis. A fenti összetett állításokat három állításból raktuk össze, így $2^3 = 8$ lehetőséget kell megvizsgálnunk az értéktáblázatban.

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
i	*i*	*i*	*i*	***i***	*i*	*i*	***i***
i	*i*	*h*	*h*	***i***	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*i*	*h*	***i***	*i*	*i*	***i***
h	*i*	*i*	*i*	***i***	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*h*	*h*	***i***	*i*	*i*	***i***
h	*i*	*h*	*h*	***h***	*i*	*h*	***h***
h	*h*	*i*	*h*	***h***	*h*	*i*	***h***
h	*h*	*h*	*h*	***h***	*h*	*h*	***h***

A táblázat ötödik és nyolcadik oszlopa mutatja, hogy minden esetben azonos a logikai értéke a két összetett állításnak.

Az előző példa alapján felírható a következő azonosság:
$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
Vagyis **a diszjunkció disztributív a konjunkció felett.**

Ennek mintájára a következő azonosság is igazolható:
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
Vagyis **a konjunkció disztributív a diszjunkció felett.**
Ennek igazolását feladatként tűztük ki.

Feladatok

1. K1 Igazoljuk a következő azonosságokat!

a) $A \wedge A = A$;
b) $A \vee A = A$;
c) $A \wedge (A \vee A) = A$;
d) $A \vee (A \wedge A) = A$.

2. K2 Igazoljuk, hogy $A \vee (A \wedge B) = A \wedge (A \vee B) = A$!

3. K2 Cáfoljuk, hogy

a) $A \wedge (A \vee B) = \neg B$; b) $A \vee (A \wedge B) = \neg B$!

4. K1 Legyen a P állítás logikai értéke p (ahol p lehetséges értéke i vagy h). Igazoljuk, hogy

a) $p \wedge i = p$; b) $p \vee h = p$!

5. K2 Igazoljuk a következő azonosságot: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$!

6. K2 A disztributív tulajdonságok felhasználásával mondjuk rövidebben a következő állításokat!

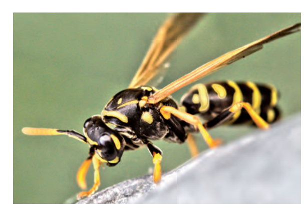
a) Holnapra megtanulom ezt a verset és megoldom ezt az egyenletet, vagy holnapra megtanulom ezt a verset és megszerkesztem ezt az ábrát.
b) Elmegyek sétálni vagy készítek egy csésze teát, és elmegyek sétálni vagy készítek egy pirítós kenyeret.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 23–24.

4. Még két logikai művelet

Az előzőekben három fontos logikai műveletet elemeztünk. Ebben a leckében még két művelettel ismerkedünk meg. Tesszük ezt azért, mert matematikaórán, de a mindennapi életben is gyakran találkozunk ezekkel.

I. Következtetéseink során használjuk a következő mondatokat:
Ha egy négyszög átlói felezve metszik egymást, akkor az a négyszög paralelogramma.
Ha egy egész szám utolsó számjegye 0, akkor osztható 10-zel.
Ha egy állatnak hat lába van, akkor az rovar.
Ha 0 °C alá süllyed a hőmérséklet, akkor megfagy a víz.



Ezek mindegyike ***ha A, akkor B*** szerkezetű mondat. Két állítás ilyen összekapcsolása sokszor előfordul. Ez a kapcsolat az **implikáció**.

Ha *A*, akkor *B*

Implikáció

Tetszőleges A, B állítások implikációján a ha A, akkor B állítást, vagy ennek valamilyen átfogalmazott alakját értjük.
Jele: $A \to B$ vagy $A \Rightarrow B$. (Kiolvasása: Ha A, akkor B. Vagy: A implikálja B-t.)

Implikáció

$A \to B$

Az implikációt gyakran használjuk matematikai tételek megfogalmazásánál. Ezekben a helyzetekben az $A \to B$ implikációt így is olvashatjuk:
Az A elegendő feltétele B-nek, vagy az A-nak szükséges feltétele B.
Az A-t **előtagnak,** a B-t **utótagnak** (konklúziónak) nevezzük.

Ha az előtag igaz, akkor az implikáció logikai értéke az utótag logikai értékével egyezik meg. Megállapodunk abban, hogy hamis előtag esetén az implikációt igaznak tekintjük. (A hamis előtag nem mond semmit az utótagra.)
Az implikációt a következő értéktáblázat definiálja:

A	B	$A \rightarrow B$
i	*i*	***i***
i	*h*	***h***
h	*i*	***i***
h	*h*	***i***

Az implikáció **nem kommutatív** művelet: $A \rightarrow B \neq B \rightarrow A$,
nem asszociatív művelet: $(A \rightarrow B) \rightarrow C \neq A \rightarrow (B \rightarrow C)$.
Ezek a bizonyítások értéktáblázattal elvégezhetők, mindkettőt feladatként kitűztük a lecke végén.

II. Már kilencedik osztályban is láttuk, hogy a ***ha A, akkor B*** állítás megfordítása a ***ha B, akkor A*** állítás lesz. (Az előtagot és az utótagot felcseréljük.)
Ha az eredeti állítás igaz, akkor a megfordítása lehet igaz, de lehet hamis is.
Ha az eredeti állítás hamis, akkor a megfordítása lehet igaz, de lehet hamis is.

A matematikában nagy figyelmet tulajdonítunk azoknak az igaz állításoknak, amelyeknek a megfordítása is igaz.

Tanulmányaink során számtalan ilyennel találkoztunk, most példaként nézzük a Pitagorasz-tételt:

- Ha egy háromszög derékszögű, akkor a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével.

Ezt az állítást bizonyítottuk, vagyis az állítás logikai értéke igaz.

Az állítás megfordítását az előtag és az utótag cseréjével kapjuk:

- Ha egy háromszögben a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével, akkor a háromszög derékszögű.

Ezt az állítást is bizonyítottuk, vagyis ennek a logikai értéke is igaz.

Ezek alapján igaz a következő állítás is:

- Ha egy háromszög derékszögű, akkor a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével, és ha egy háromszögben a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével, akkor a háromszög derékszögű.

Ez a megfogalmazás nagyon hosszú! Ezt röviden így szoktuk megfogalmazni:

- Egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha a leghosszabb oldal négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével.

Most már látjuk, hogy itt lényegében két implikációt konjunkcióval kapcsoltunk össze:
$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.
A rövid megfogalmazásban az ***… akkor és csak akkor …*** szófordulatot használjuk.
Ezt egyetlen logikai műveletnek, **ekvivalenciának** nevezzük.

Ekvivalencia

Tetszőleges A, B állítások ekvivalenciáján az A-val és a B-vel képezhető két implikáció konjunkcióval való összekapcsolását értjük, ami röviden az A akkor és csak akkor, ha B állítás lesz.
Jele: $A \leftrightarrow B$ vagy $A \Leftrightarrow B$. (Kiolvasása: A akkor és csak akkor, ha B.)

Ekvivalencia

$A \leftrightarrow B$

Az ekvivalenciát is gyakran használjuk a matematikai tételek megfogalmazásánál. Ekkor az $A \leftrightarrow B$ ekvivalenciát így is olvashatjuk: *Az A szükséges és elegendő feltétele B-nek* vagy a *B szükséges és elégséges feltétele A-nak.*
Az ekvivalencia értelmezése alapján az értéktáblázata a következő módon alakul:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
i	*i*	*i*	*i*	***i***
i	*h*	*h*	*i*	***h***
h	*i*	*i*	*h*	***h***
h	*h*	*i*	*i*	***i***

Vagyis az ekvivalencia értéktáblázata:

Az ekvivalencia értéktáblázata

A	B	$A \leftrightarrow B$
i	*i*	***i***
i	*h*	***h***
h	*i*	***h***
h	*h*	***i***

Az ekvivalencia kommutatív és asszociatív művelet. Értéktáblázattal ezeket könnyen igazolhatjuk.

Feladatok

1. K2 Igazoljuk, hogy az implikáció
a) nem kommutatív;
b) nem asszociatív művelet!

2. K2 Igazoljuk a következő azonosságokat!
a) $A \to B = (\neg A) \vee B$;
b) $A \to B = \neg(A \wedge (\neg B))$.

3. K2 Mutassuk meg, hogy tetszőleges A és B állítás esetén $A \to B$ és $(\neg B) \to (\neg A)$ logikai értéke egyenlő!

4. K2 Három ember egy-egy állítását olvashatjuk a következőkben. Van-e közöttük egyező kijelentés?
András: Nem esik az eső, és ernyővel megyek.
Botond: Ha esik az eső, akkor ernyővel megyek.
Csaba: Nem esik az eső, vagy ernyővel megyek.

További feladatok: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.: 25–33.

5. Alkalmazások

Az előzőekben megismerkedtünk a leggyakrabban használt logikai műveletekkel. Ezek segítségével megadható az összetett állítások szerkezete, így ezeknek az állításoknak a logikai értéke is könnyebben meghatározhatóvá válik.

1. példa Adjuk meg a következő állítás szerkezetét!
Ha egy természetes szám számjegyeinek összege osztható 9-cel, és az utolsó számjegye osztható 5-tel, akkor a szám osztható 45-tel.

Megoldás
Vezessük be a következő jelöléseket:
A: Egy természetes szám számjegyeinek összege osztható 9-cel.
B: Egy természetes szám utolsó számjegye osztható 5-tel.
C: Egy természetes szám osztható 45-tel.
Ezekkel a jelölésekkel az összetett állítás szerkezete: $(A \wedge B) \to C$.

2. példa A következő állítást bontsuk fel egyszerű kijelentésekre, majd logikai műveletekkel írjuk fel az összetett kijelentést!
Ha délután tanulok és nem számítógépezek, akkor holnapra elkészítem a házi feladatomat, és olvasok vagy elmegyek futni.

Megoldás
A fenti összetett állítás egyszerű kijelentései (állításai) a következők:
A: Délután tanulok.
B: Délután számítógépezek.
C: Holnapra elkészítem a házi feladatomat.
D: Olvasok.
E: Elmegyek futni.
A *ha … , akkor …* azt mutatja, hogy ez az állítás implikáció. Az előtagja az *és* miatt konjunkció. Az utótagja is konjunkció, amelynek a második része diszjunkció a *vagy* miatt.
Vagyis az állítás szerkezete: $(A \wedge (\neg B)) \to [C \wedge (D \vee E)]$.

3. példa Ágnes ezt mondja édesapjának: Ha bepakolom a táskába holnapra az iskolai cuccot, vagy meglocsolom a szobámban a virágokat, akkor nem kapcsolom be a számítógépet és nem megyek el Csokival sétálni.
Mi Ágnes kijelentésének logikai értéke, ha nem pakolta be a táskájába holnapra az iskolai cuccot, de meglocsolta a szobájában a virágokat, nem kapcsolta be a számítógépet és nem ment el Csokival sétálni?

Megoldás
Ágnes összetett állítása négy egyszerű állításból áll:
A: Bepakolja a táskába holnapra az iskolai cuccot.
B: Meglocsolja a szobában a virágokat.
C: Bekapcsolja a számítógépet.
D: Elmegy Csokival sétálni.
Az állítása egy implikáció, melynek előtagja diszjunkció, utótagja konjunkció. Ágnes kijelentésének szerkezete: $(A \vee B) \to ((\neg C) \wedge (\neg D))$.
Tudjuk, hogy $|A| = h$, $|B| = i$. Vagyis $|A \vee B| = i$.

Tudjuk továbbá, hogy $|\neg C| = i$, $|\neg D| = i$. Vagyis $|(\neg C) \wedge (\neg D)| = i$.
Mivel az előtag és az utótag logikai értéke is igaz, ezért az implikáció logikai értéke is igaz.
Azt is mondhatjuk, hogy Ágnes kijelentésével megegyező volt, ami ténylegesen történt.

4. példa Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$!
Megoldás közben a magyarázó szöveg helyett használjuk a logikai műveletek jeleit!

Megoldás

$$\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{(3x-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$|3x-1| = |x+3|$$
$$\Updownarrow$$
$$\overbrace{3x - 1 = x + 3 \vee 3x - 1 = -x - 3}$$
$$x = 2 \vee x = -0{,}5$$

Vagyis az egyenlet gyökei: $x = 2 \vee x = -0{,}5$. Az ekvivalens átalakítások miatt hamis gyököt nem kaphattunk, gyököt nem veszthettünk.

5. példa Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt{x+5} = x - 1$!
Megoldás közben a magyarázó szöveg helyett most is használjuk a logikai műveletek jeleit!

Megoldás

$$\sqrt{x+5} = x - 1$$
$$\Downarrow$$
$$x + 5 = x^2 - 2x + 1$$
$$\Updownarrow$$
$$0 = x^2 - 3x - 4$$
$$\Updownarrow$$
$$0 = (x-4)(x+1)$$
$$\Updownarrow$$
$$\overbrace{x = 4 \vee x = -1}$$

Az első átalakításunk implikáció volt. Vagyis az új egyenlet gyökein kívül az eredeti egyenletnek nem lehet több gyöke, de nem biztos, hogy az új egyenlet gyökei az eredeti egyenletnek is gyökei. Ilyen esetben nagyon fontos, hogy a gyököket ellenőrizzük!
Az $x = -1$ nem gyöke az egyenletnek. (Bal oldal: $\sqrt{-1+5} = 2$, jobb oldal: $-1 - 1 = -2$.)
Az egyenlet egyedüli megoldása: $x = 4$.

A logikának a tulajdonságokkal foglalkozó ága halmazok alkalmazásával egyszerűen tárgyalható. Legyen kiindulásként egy nem üres H halmaz, és a halmaz elemein legyen értelmezve néhány tulajdonság. Ekkor ezen tulajdonságok bármelyikének a vizsgálatát visszavezethetjük annak a halmaznak a vizsgálatára, amely az adott tulajdonsággal rendelkező összes elemet tartalmazza. Ez megfordítva is igaz. A H halmaz valamely részhalmazának vizsgálata azt jelenti, hogy az adott halmaz elemének lenni tulajdonságot is vizsgáljuk.

6. példa Szemléltessük halmazokkal a következő kijelentéseket!

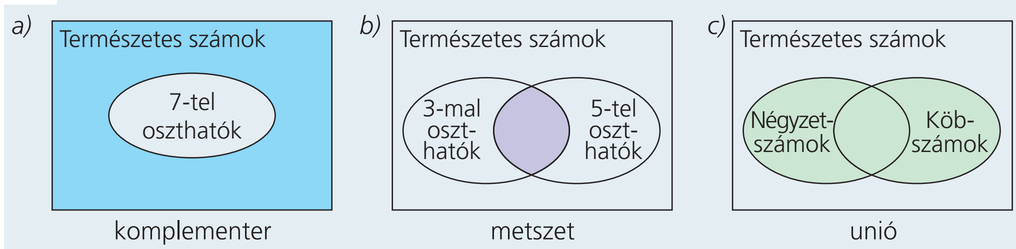
a) Ez a természetes szám nem osztható 7-tel.

b) Ez a természetes szám osztható 3-mal és osztható 5-tel.

c) Ez a természetes szám négyzetszám vagy köbszám.

Megoldás

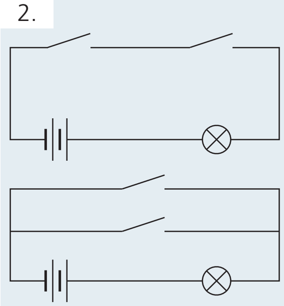
1.



Láthatóan szoros kapcsolat van a matematikai logikában megismert negáció és a halmazoknál tanult komplementer között. Hasonló kapcsolatot fedezhetünk fel a konjunkció és a metszet, valamint a diszjunkció és az unió között.

Megismerkedtünk a matematikai logika legfontosabb fogalmaival. Az eddig látottakat azonban csak bevezetőként kezelhetjük.
A matematikai logikával való ismerkedést *Varga Tamás* (1919–1987), a matematikatanítás nemzetközileg elismert és kiemelkedő egyénisége is fontosnak tartotta. Már 1960-ban megjelent a *Matematikai logika kezdőknek* című könyve. A matematikaoktatás megreformálásának másik ösztönzője *Pólya György* (1887–1985) volt, akinek *A gondolkodás iskolája* című könyve 16 nyelven jelent meg.
Érdekességként említjük, hogy kapcsolat teremthető a matematikai logika és az áramkörök között. A *2. ábrán* vázlatosan szemléltetett áramkörök két kapcsolóból, egy áramforrásból és egy lámpából állnak. Annak a feltétele, hogy az áramkörben áram folyjék, az, hogy az első ábrán mindkét kapcsolónak bekapcsolt állapotúnak kell lenni, a másodikon elegendő csak az egyiknek bekapcsoltnak lenni. Láthatóan az első áramkör a konjunkcióval, a második pedig a diszjunkcióval van kapcsolatban.
Az így kapott logikai áramkörökre épülnek az automatikus berendezések és az elektronikus számítógépek is. Ezek gyakorlati jelentősége óriási. Látható, hogy matematikai logika nélkül nem építhetők meg a ma működő számítógépek sem. A bevezetőben már említettük, hogy ebben kiemelkedő szerepe volt *Neumann Jánosnak*.

2.



Neumann János (1903–1957)

EDSAC-ot (Electronic Delay Storage Automatic Calculator), mely az első tárolt programú számítógép volt a világon, Neumann János elvi alapvetése után készítették el a cambridge-i egyetem matematikai laboratóriumában. Az első programot 1949. május 6-án futtatták le rajta.