Notații (simboluri matematice) folosite în acest manual

Distanța de la punctul A la dreapta e: d(A; e), sau Ae

Distanța dintre punctele A și B: AB sau $\overline{AB}$ sau d(A; B)

Dreapta determinată de punctele A și B: $e(A; B)$

Unghiul dreptelor f_1 și f_2: $\sphericalangle(f_1; f_2)$ sau $(f_1; f_2)\sphericalangle$

Unghiul cu vârful în punctul C determinat de punctele A și B, care se află pe laturile unghiului: $ACB\sphericalangle$

Unghiul cu vârful în punctul C: $C\sphericalangle$

Unghiuri: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Triunghi determinat de punctele A, B, C: $ABC\triangle$

Aria triunghiului ABC: $T(ABC)$ sau T_{ABC}

Semiperimetrul triunghiului cu laturi egale a, b, c: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

Unghi drept: ⊾

Dreapta e este perpendiculară pe dreapta f: $e \perp f$

Dreapta e este paralelă cu dreapta f: $e \parallel f$

Congruență: $\cong$; $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$

Raportul de asemănare: λ

Vectorul determinat de punctele A și B (direcționat de la A la B): $\overrightarrow{AB}$

Egal, diferit: $=, \neq$; $a = 2, b \neq 5$

Identic egal: $\equiv$; $a + b \equiv 5$

Aproximativ egal: $\approx$; $a \approx 2{,}3$; $8{,}54 \approx 8{,}5$

Mai mic, mai mic sau egal: $<, \leq$; $2 < 3$, $5 \leq x$

Mai mare, mai mare sau egal: $>, \geq$; $6 > 4$, $a \geq 2$

Mulțimea numerelor naturale: $\mathbf{N}$; $\{0; 1; 2; \ldots\}$

Mulțimea numerelor întregi: $\mathbf{Z}$; $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

Mulțimea numerelor întregi pozitive și negative: $\mathbf{Z}^+$, $\mathbf{Z}^-$; $\{1; 2; 3; \ldots\}$, $\{-1; -2; -3; \ldots\}$

Mulțimea numerelor raționale și iraționale: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^*$

Mulțimea numerelor raționale pozitive și negative: $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{Q}^-$

Mulțimea numerelor reale: $\mathbf{R}$

Mulțimea numerelor reale pozitive și negative: $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$

Aparține (element al mulțimii), nu aparține mulțimii: $\in, \notin$; $5 \in \mathbf{N}$, $-2 \notin \mathbf{Z}^+$

Submulțime, submulțime netrivială: $\subseteq, \subset$; $A \subseteq \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$

Interval închis: $[a; b]$

Interval închis la stânga, deschis la dreapta: $[a; b[$

Interval deschis la stânga, închis la dreapta: $]a; b]$

Interval deschis: $]a; b[$

Valoarea absolută a numărului x: $|x|$; $|-3{,}1| = 3{,}1$

Legea de corespondență a funcției f: $f\colon x \mapsto f(x)$; $f\colon x \mapsto 2x + 3$ sau $f(x) = 2x + 3$; $f(x) = y$; $y = 2x + 3$

Valoarea funcției în punctul x_0: $f(x_0)$; $f(5)$, dacă $x_0 = 5$

n factorial: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Logaritm în baza a: $\log_a x$

Logaritm în baza 10: $\lg x$

Logaritm în baza e: $\ln x$

Coeficient binomial (k sub n): $\binom{n}{k}$

Radical de ordinul doi (rădăcină pătrată) din x: $\sqrt{x}$

Radical de ordinul n din x: $\sqrt[n]{x}$

Introducere

Scopul acestui manual este sprijinirea pregătirii elevilor pentru examenul de bacalaureat de nivel mediu. Dezvoltarea concepției matematice la elevi se realizează prin elaborarea *componentelor materiei* acestei discipline, legate de *definiții* și *noțiuni.*

Exemplele rezolvate contribuie la predarea noilor cunoștințe și la asimilarea materiei. La sfârșitul fiecărui capitol se găsesc exerciții și probleme cu scopul de a ajuta pregătirea elevilor pentru examenul de bacalaureat de nivel mediu.

Pe parcursul studiilor liceale are loc consolidarea noțiunilor introduse mai devreme pe cale intuitivă, prin intermediul diferitelor activități, consolidare urmată de definirea exactă a noțiunilor și generalizarea acestora. Dorim să dezvoltăm deprinderile elevilor de a fi capabili să aplice în cadrul *altor arii curriculare* relațiile pe care și le-au însușit în diverse domenii ale disciplinei, vom sprijini aplicarea de către elevi a matematicii în rezolvarea unor *probleme cu caracter practic. Ilustrațiile* și *fotografiile* vor stimula asimilarea cunoștințelor și a relațiilor matematice.

În materia prezentată vom formula anumite *ipoteze*, care vor putea fi demonstrate sau infirmate în câteva etape. Este foarte importantă stârnirea interesului elevilor pentru *demonstrația* afirmațiilor. Vom prezenta demonstrațiile unor teoreme mai simple, câteva metode de demonstrație, respectiv formularea exactă *a unor noțiuni și reguli*. (Acestea le vom marca cu albastru în manual.)

În text am marcat cu albastru anumite curiozități din istoria matematicii și cele legate de disciplina noastră. *(Propunem folosirea internetului pentru completarea acestor informații.)*

Una dintre cele mai importante sarcini ale profesorilor de matematică este cultivarea interesului pentru rezolvarea problemelor. Condiția indispensabilă a acestui deziderat este *înțelegerea unor texte* simple *de matematică* și analiza lor. Dezvoltarea deprinderilor de a discuta problemele, de a căuta, de a găsi mai multe soluții, va contribui de asemenea la dezvoltarea *gândirii logice.*

Gândirea logică este indispensabilă atât la rezolvarea problemelor, cât și la procedurile algoritmice și la aplicații. Elaborarea unor *algoritmi* de câțiva pași în diferite domenii ale matematicii este necesară și la studiul informaticii.

Problemele elaborate pe parcursul celor patru ani de studii, în funcție de gradul de dificultate al acestora, vor contribui la pregătirea elevilor pentru examenul de bacalaureat. Le-am clasificat în felul următor:

nivel mediu, mai simplă **K1**

nivel mediu, mai dificilă **K2**

nivel ridicat, mai simplă **E1**

nivel ridicat, mai dificilă **E2**

Materia pentru examenul de bacalaureat de nivel ridicat a fost marcată cu litere minuscule de culoarea verde.

Soluțiile detaliate ale problemelor propuse spre rezolvare la sfârșitul lecțiilor se găsesc pe internet la pagina web : www.ntk.hu

Pentru cei interesați, dornici să exerseze, mai recomandăm probleme selectate din familia culegerilor *MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény* în ediția Editurii Didactice.

Gerőcs László–Orosz Gyula–Paróczay József–Szászné Dr. Simon Judit:

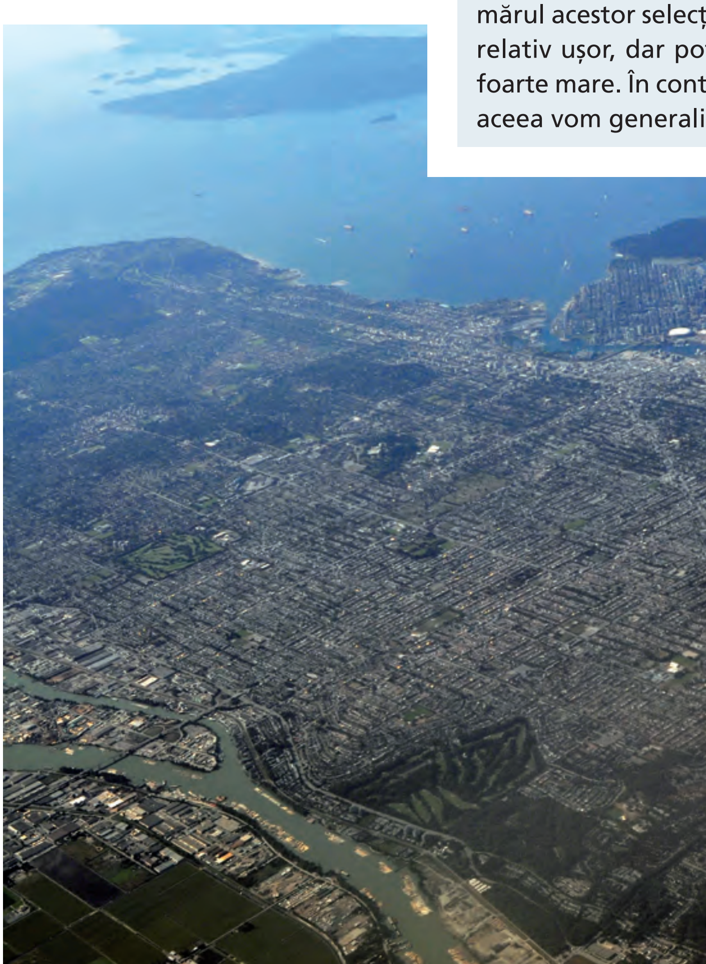
16125/I (+ CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I.
16125/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény I., Megoldások
16126/I (+ CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.
12126/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II., Megoldások

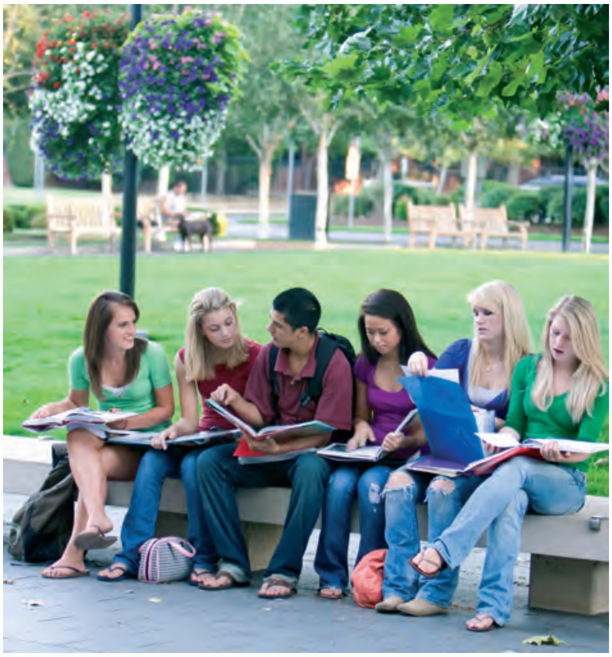
Czapáry Endre–Czapáry Endréné–Csete Lajos–Hegyi Györgyné–Iványiné Harró Ágota–Morvai Éva–Reiman István:

16127/I (+ CD-n a megoldások)	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III:, *Geometriai feladatok gyűjteménye*
16127/II	MATEMATIKA Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény III., Megoldások, *Geometriai feladatok gyűjteménye*

I. Combinatorică

În anii precedenți am studiat probleme de numărare la care trebuia să determinăm numărul tuturor cazurilor posibile, la fel și dispunerea elementelor unei mulțimi într-o anumită ordine, numărul posibil al acestor ordonări. Am întâlnit probleme în a selecta dintr-o mulțime oarecare submulțimi de elemente care posedă anumite proprietăți, am calculat numărul acestor selecții. În cazurile mai simple aceste calcule se pot efectua relativ ușor, dar pot fi complicate dacă numărul cazurilor posibile este foarte mare. În continuare vom recapitula cele învățate anterior, iar după aceea vom generaliza acestea.





1. Probleme simple de combinatorică

Abația din Pannonhalma

Exemplul 1 La începutul anului școlar elevii unei clase, împreună cu dirigintele lor, au hotărât că dintre obiectivele turistice care fac parte din Patrimoniul Universal UNESCO, vor vizita următoarele : Hollókő, Aggteleki-karszt, Abația din Pannonhalma, Parcul Național Hortobágy, monumentele funerare antic creștine din Pécs, respectiv podgoria de vinuri Tokaj. În câte moduri pot stabili ordinea acestor vizite?

Soluție

Obiectivele turistice vizate formează o mulțime care conține 6 elemente. Problema de mai sus o putem formula în felul următor: în câte moduri putem ordona cele șase elemente?

Pentru prima vizită putem alege oricare din obiectivele de mai sus, deci există 6 cazuri posibile. Pentru cea de-a doua vizită rămân 5 cazuri posibile, după care 4, 3, 2, respectiv 1.

În consecință ordinea acestor vizite se poate stabili în $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ de moduri.

Exemplul 2 La jocurile de noroc se poate întâmpla ca cei care fac pariuri să poată efectua un joc suplimentar: de exemplu participantul să joace un număr de 6 cifre. Cele șase cifre se extrag dintre cifrele 1, 2, ..., 9., una după alta. La o extragere au fost scoase cifrele 1, 4, 7, 7, 9, 9, iar la o altă extragere cifrele 2, 2, 2, 2, 3, 8 într-o ordine oarecare. Să se determine numărul posibil al cazurilor în care se poate obține un număr câștigător de 6 cifre la prima, respectiv la cea de-a doua extragere.

Soluție

Exemplul 2 seamănă cu exemplul 1, dar în acest caz nu putem vorbi de mulțimea elementelor, deoarece o mulțime nu poate conține elemente egale.

Dacă am avea 6 cifre diferite, numărul tuturor cazurilor posibile ar fi egal cu $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, adică 720. Vom marca elementele egale prin culori diferite. Aceste 720 de cazuri conțin de exemplu și numerele egale 147979 și 147979 sau 232228 și 232228.

Dacă ordonăm cifrele 1, 4, 7, 7, 9, 9, schimbând între ele cele două cifre de 7, obținem același număr, la fel și în cazul celor două cifre de 9. Deci fiecare număr de șase cifre, din cele 720, apare de patru ori.

Conform raționamentului de mai sus la prima extragere numărul total al cazurilor posibile este egal cu $\frac{720}{2 \cdot 2} = 180$.

În cazul ordonării cifrelor 2, 2, 2, 2, 3, 8 , ordonând primele patru cifre nu obținem numere diferite de șase cifre. Acestea se pot ordona în $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, adică în 24 de moduri, deci fiecare număr de șase cifre, din cele 720, apare de 24 de ori.

În consecință la a doua extragere numărul total al cazurilor posibile este egal cu $\frac{720}{24} = 30$.

Exemplul 3 În finala cursei de 100 de metri a unui concurs atletic internațional s-au calificat opt atleți. Privind rezultatul final, după pronosticul unui reporter, orice ordine a atleților este posibilă la sosire. Presupunând că excludem posibilitatea unor rezultate egale, în câte moduri se pot acorda medaliile?

Soluție
Dintre cei opt atleți numai trei pot să fie medaliați. Oricare dintre ei poate cuceri medalia de aur, dar numai 7 medalia de argint și 6 medalia de bronz. În total vor fi $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ de cazuri posibile.

Exemplul 4 În Ungaria numerele de înmatriculare conțin trei litere urmate de trei cifre. Între litere nu pot figura cele cu accent, iar numerele nu pot fi simultan egale cu zero. În aceste condiții câte numere de înmatriculare se pot forma?

Soluție
Dintre cele 26 de litere oricare poate să fie prima *(figura 1)*.

Într-un număr de înmatriculare se pot repeta atât literele cât și numerele, de unde rezultă că pe locul doi și locul trei pot figura tot 26 de litere. Deci deocamdată sunt $26^3 = 17\,576$ de cazuri posibile. Urmând același raționament, rezultă că în cazul numerelor avem $10^3 = 1000$ de cazuri posibile. Dar între aceste numere figurează și cele trei cifre de 0, adică rămân 999.

În consecință se pot forma în total $26^3 \cdot (10^3 - 1) = 17\,558\,424$ numere de înmatriculare.

1.

Q W E R T Z U I O P
A S D F G H J K L
Y X C V B N M

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Exemplul 5 Câte plane pot determina 1000 de puncte din spațiu, dintre care nu există patru care să fie coplanare?

Soluție
Alegem arbitrar trei puncte, care, conform condițiilor, determină univoc un plan. (Trei puncte nu pot fi coliniare, doarece în cazul contrar ar fi coplanare cu un punct arbitrar din spațiu, ceea ce contrazice condiția)

Dacă am lua în considerare și ordinea punctelor, atunci am avea în total $1000 \cdot 999 \cdot 998$, adică 997 002 000 de cazuri posibile. Dar ordinea celor trei puncte nu contează la determinarea planului. Trei puncte distincte se pot ordona în $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ moduri, deci numărul total al cazurilor posibile va fi egal cu $\dfrac{997\,002\,000}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 166\,167\,000$.

În consecință cele 1000 de puncte date vor determina 166 167 000 de plane.

Exemplul 6 O familie compusă din cinci membri a primit două apeluri într-o oră la un telefon cu fir. În câte moduri pot răspunde la apel membrii familiei, dacă aceeași persoană are voie să răspundă de două ori, iar ordinea răspunsurilor nu se ia în considerare?

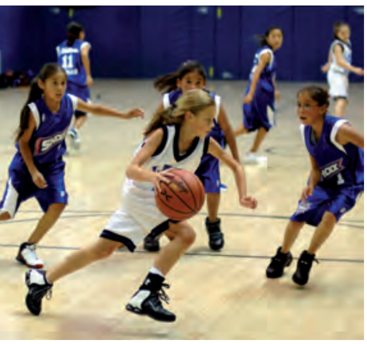
Soluție
Fie P, M, A, B, C membrii familiei. Aceste 5 elemente trebuie să le ordonăm în grupuri care conțin 2 elemente, astfel încât un element poate figura de două ori.
Cazurile posibile vor fi:

PP,	PM,	PA,	PB,	PC,
MM,	MA,	MB,	MC,	
AA,	AB,	AC,		
BB,	BC,			
CC.				

Deci membrii familiei puteau să răspundă la apel în 15 moduri.

Probleme

1. K1 Dintr-o clasă șapte elevi participă la cercul de biologie. În câte moduri se poate trece numele lor în condică, dacă nu se ia în considerare ordinea alfabetică a elevilor?



2. K1 La un concurs școlar de baschet participă nouă echipe. În câte moduri se poate stabili ordinea finală a echipelor, dacă nu admitem rezultatele egale?

3. K1 În fereastră am așezat opt ghivece cu flori. Trei flori au culoarea roșie, iar 5 au culoarea albă. În câte moduri se pot aranja ghivecele după culorile florilor?

4. K1 Dintr-un magazin am cumpărat 3 flacoane de suc de caise și 4 flacoane de suc de piersici. În câte moduri le putem așeza într-un coș?

5. K1 Cei șase membri ai unei familii ocupă șase scaune așezate în jurul unei mese rotunde într-o ordine oarecare. Două așezări se consideră diferite dacă și numai dacă există cel puțin un membru al familiei care are cel puțin un vecin diferit față de o altă așezare.
a) În câte moduri se pot stabili așezări diferite?
b) În câte moduri se poate realiza ocuparea scaunelor dacă cei mai tineri frați vor sta tot timpul unul lângă altul?

6. K2 Într-o companie fiecare persoană dă mâna cu cealaltă.
a) Câte strângeri de mâini s-au efectuat dacă această companie a avut 8 membri?
b) Câți membri are compania dacă s-au efectuat în total 45 de strângeri de mâini?

7. K2 După ce a consultat exemplele rezolvate într-o lecție, Botond a spus: ÉRTEM (ÎNȚELEG). Câte cuvinte se pot forma în total cu aceste litere, folosind fiecare literă o singură dată? Precizați câteva dintre aceste cuvinte care au sens.

8. K2 Dintr-o companie fac parte 6 bărbați și 9 femei. Fiecare bărbat dă mâna cu celălalt bărbat. Femeile se salută reciproc cu formula „Szervusz”. Bărbații le salută pe femei cu „Sărut mâna”, iar femeile îi salută pe bărbați cu „Bună ziua”
a) Câte strângeri de mâini s-au efectuat în total?
b) De câte ori s-a rostit: „Bună ziua”?
c) De câte ori s-a rostit: „Sărut mâna”?
d) De câte ori s-a rostit: „Szervusz”?

Alte probleme: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II. 1–9, 20–22

2. Numărul mulțimilor ordonate

În clasa a 10-a am studiat deja câteva probleme de ordonare și factorialele. În continuare vom recapitula aceste cunoștințe și le vom completa.
Există probleme simple la care se pune problema dispunerii în ordine ale unor obiecte diferite.
Dacă avem trei obiecte diferite, le putem ordona în
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ moduri,
în cazul a patru obiecte diferite în
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ de moduri,
iar dacă avem 5, atunci în
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ de moduri.
Am constatat că acestea se pot nota în felul următor:
$1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$.
În general produsul primelor n numere întregi pozitive se notează în felul următor:
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$.

„*n* factorial”

Produsul primelor n numere pozitive întregi se numește „n factorial” și se notează cu
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$.
Prin convenție acceptăm că $1! = 1$, $0! = 1$.

Factorial
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$

Să formulăm mai general cele constatate mai sus.

Notăm cu P_n numărul care arată în câte moduri se pot ordona n elemente diferite.

P_n

Pe primul loc putem alege oricare dintre cele n elemente, deci numărul cazurilor posibile este egal cu n. Pe locul doi avem $n-1$ cazuri posibile, deci pe primele două locuri putem ordona elementele în $n(n-1)$ moduri. Continuând raționamentul, pe locul n rămâne un singur element.
Produsul cazurilor posibile ne va da numărul total al permutărilor.
Pe baza celor constatate formulăm teorema referitoare la cazul general.

Teoremă

n obiecte diferite **se pot ordona** în $n!$ moduri.

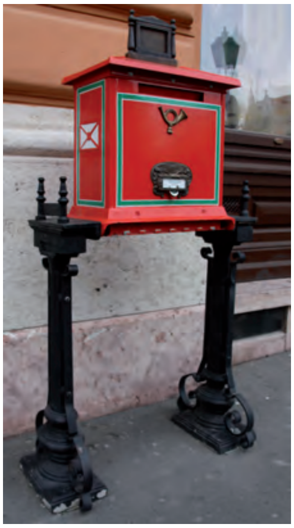
Demonstrație

Presupunem că un număr de k obiecte diferite se pot ordona în $k!$ moduri. Vom arăta că din această ipoteză rezultă că cele $k+1$ obiecte diferite se pot ordona în $(k+1)!$ moduri.
Dintre $k+1$ obiecte diferite oricare poate ocupa primul loc, deci avem $k+1$ cazuri posibile. În continuare trebuie să ordonăm acele k obiecte rămase. Din ipoteză rezultă că acestea se pot ordona în $k!$ moduri. Deci în total avem $(k+1)k!$ cazuri posibile care este egal chiar cu $(k+1)!$. Știm că 1 obiect se poate ordona în $1!$ moduri, din teorema anterioară rezultă că 2 obiecte diferite se pot ordona în $2!$ moduri, 3 obiecte diferite în $3!$ moduri. Continuând raționamentul, formula de calcul este valabilă pentru orice număr întreg pozitiv n.

Observație În loc de obiecte diferite (persoane, culori, numere, ...) vom vorbi despre elementele unei mulțimi care conține n elemente și despre ordonarea acestor elemente.

Permutări
$P_n = n!$

O anumită ordonare a n elemente diferite se numește o permutare a acestor elemente. Schimbarea ordinii elementelor se numește permutarea elementelor. Ne interesează numărul total al permutărilor: P_n. Pe baza teoremei anterioare numărul permutărilor unei mulțimi care conține n elemente, este egal cu $n!$, adică $P_n = n!$



Exemplul 1 Să se permute literele cuvântului POSTA.
a) Câte permutări vom avea în total?
b) Să se determine toate permutările care se încep cu litera T.

Soluție
a) Permutări de 5 elemente: $P_5 = 5! = 120$.
b) Dacă prima literă este T, pe locurile următoare vor urma în total P_4 de elemente.
TAOPS, TAOSP, TAPOS, TAPSO, TASOP, TASPO,
TOAPS, TOASP, TOPAS, TOPSA, TOSAP, TOSPA,
TPAOS, TPASO, TPOAS, TPOSA, TPSAO, TPSOA,
TSAOP, TSAPO, TSOAP, TSOPA, TSPAO, TSPOA.

Exemplul 2 Să se calculeze:
a) $\frac{5000!}{4998!}$; *b)* $\frac{1000!}{3!\cdot 997!}$; *c)* $\frac{2!+3!+4!+5!}{19}$; *d)* $\frac{13!\cdot 15!\cdot 17!\cdot 19!}{12!\cdot 14!\cdot 16!\cdot 18!}$.

Soluție
a) $\frac{5000!}{4998!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 4997\cdot 4998\cdot 4999\cdot 5000}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 4997\cdot 4998} = 4999\cdot 5000 = 24\,995\,000.$

b) $\frac{1000!}{3!\cdot 997!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 997\cdot 998\cdot 999\cdot 1000}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 996\cdot 997)} = \frac{998\cdot 999\cdot 1000}{1\cdot 2\cdot 3} = 166\,167\,000.$

c) $\frac{2!+3!+4!+5!}{19} = \frac{1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{19} = \frac{2+6+24+120}{19} = .$

$= \frac{152}{19} = 8$

d) $\frac{13!\cdot 15!\cdot 17!\cdot 19!}{12!\cdot 14!\cdot 16!\cdot 18!} = 13\cdot 15\cdot 17\cdot 19 = 62\,985.$

Permutări cu repetiții

Vorbim despre permutări și în cazul în care obiectele de ordonat nu sunt diferite. În acest caz le numim **permutări cu repetiții**.

Exemplul 3 La o activitate facultativă participă 11 elevi, patru dintre ei provin din clasa *A*, șase din clasa *B*, iar unul din clasa *C*. În câte moduri pot intra în sala de studiu, dacă luăm în considerare un singur criteriu: din ce clasă provin elevii?

Soluție
Fie cei 11 elevi: *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, *b*, *b*, *b*, *c*. Vrem să determinăm numărul permutărilor acestor litere.

Dacă cele 11 litere ar fi diferite, numărul permutărilor ar fi egal cu 11!. Dacă schimbăm între ele ordinea celor patru litere *a*, la fel și în cazul celor șase litere *b*, din punct de vedere a problemei puse nu obținem permutări diferite.

Astfel numărul total al permutărilor căutate va fi egal cu $\frac{11!}{4!\cdot 6!} = 2310$.

Dacă vrem să determinăm numărul permutărilor cu repetiții a *n* obiecte, nu toate diferite, atunci trebuie să cunoaștem numărul obiectelor care se repetă. Fie numărul acestora

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(n_1 + \ldots + n_k \leq n)$.

Notăm cu $P_n^{n_1;\ldots;n_k}$ **numărul permutărilor cu repetiții a *n* elemente**, dintre care $\boldsymbol{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ **se repetă** (sunt egale).

$P_n^{n_1;\ldots;n_k}$

Pe baza raționamentului folosit la exemplul 3 putem da o formulă pentru aflarea acestui număr.

Teoremă

Numărul permutărilor cu repetiții a *n* elemente: $P_n^{n_1;\ldots;n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot \ldots \cdot n_k!}$, unde $n_1, n_2, \ldots, n_k$ reprezintă numărul elementelor care se repetă.

Numărul permutărilor cu repetiții a *n* elemente

În cazul exemplului 3, acest număr este egal cu $P_{11}^{4;6} = \frac{11!}{4!\cdot 6!} = 2310$.

Probleme

1. K1 Să se calculeze:

a) $\frac{4001!}{3999!}$; *b)* $\frac{100!}{3!\cdot 97!}$; *c)* $\frac{2!+4!+6!+8!}{2}$; *d)* $\frac{22!\cdot 24!\cdot 26!}{21!\cdot 23!\cdot 25!}$.

2. K2 Să se aducă la forma mai simplă expresiile:

a) $(n-2)!\cdot(n-1)n(n+1)$; *b)* $(n-1)!\cdot n(n+1)(n+2)$;

c) $\frac{(n+2)!}{(n+2)(n+1)}$; *d)* $\frac{(n+4)!}{(n+1)!}$;

e) $(n+3)!+(n+2)!+(n+1)!$; *f)* $\frac{(n-1)!}{n^2-3n+2}$.

3. K2 Câte permutații au literele cuvintelor de mai jos?

a) FŐLDRAJZ (GEOGRAFIE)

b) INFORMATIKA (INFORMATICĂ)

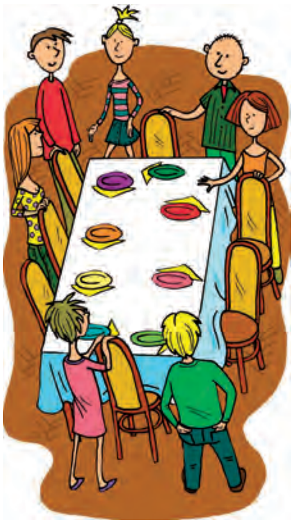
c) MATEMATIKA (MATEMATICĂ)

4. K2 În metrou șase persoane pot ocupa locuri pe o banchetă, una lângă cealaltă. La stația terminală se urcă Andrei, Eliza, Daniel, Rebeca, Viorica și Victoria.

a) În câte moduri pot ocupa toate locurile?

b) În câte moduri pot ocupa toate locurile dacă Réka și Vanda vor să stea una lângă cealaltă?

c) În câte moduri pot ocupa toate locurile dacă Andrei și Victoria nu doresc să stea unul lângă celălalt?
d) În câte moduri pot ocupa toate locurile dacă băieții și fetele vor să stea separat?
e) În câte moduri pot ocupa toate locurile dacă băieții și fetele vor să stea separat, dar Daniel vrea să stea lângă Rebeca?
f) În câte moduri pot ocupa toate locurile dacă băieții și fetele vor să stea separat, dar Daniel nu vrea să stea lângă Rebeca?



5. K2 Ana, Robert, Matei, Victor, Eva, Mălina și Simona vor să ocupe șapte scaune așezate în jurul mesei în sufragerie. Două așezări se consideră diferite dacă și numai dacă există cel puțin o persoană care are cel puțin un vecin diferit față de o altă așezare.
a) În câte moduri pot ocupa scaunele?
b) În câte moduri pot ocupa scaunele dacă Ana și Mălina ar dori să stea una lângă alta?
c) În câte moduri pot ocupa scaunele dacă vecinii lui Matei vor fi Victor și Robert?

6. K2 Aruncăm 4 monede de 50 de Ft. și 6 monede de 100 de Ft. într-un automat de joc. În câte moduri putem realiza aceasta?

7. K2 Se dau următoarele cifre: 1 buc. de 0, 1 buc. de 5, 3 buc. de 2 și 2 buc. de 4. Folosind toate cifrele să formăm numere telefonice de 7 cifre.
a) Câte numere se pot forma dacă prima cifră nu poate să fie 0?
b) Câte numere se pot forma la care primele trei cifre vor fi 242?

8. K2 Folosind toate cele 10 cifre, câte numere se pot forma, care:
a) au 10 cifre;
b) au 10 cifre și sunt divizibile cu 3;
c) au 10 cifre și sunt divizibile cu 9;
d) au 10 cifre și sunt divizibile cu 6;
e) au 10 cifre și sunt divizibile cu 45;
f) au 10 cifre și sunt divizibile cu 90.

9. E1 Să se arate că suma factorialelor a trei numere întregi pozitive este egală cu produsul dintre factorialul celui mai mic număr și pătratul celui mai mare număr.

Alte probleme: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 50–63., 84–100.

10. E1 La un meci de baschet se pot obține aruncări de un punct, de două puncte și de trei puncte. Un jucător a obținut în total 12 puncte. În câte moduri se poate realiza acest punctaj?

11. E1 După etapa a șaptea a unui campionat de fotbal o echipă a acumulat 11 puncte. Pentru victorie se acordă 3 puncte, pentru înfrângere 0, iar pentru meci egal 1 punct. În câte moduri se putea realiza acest punctaj?

3. Selecție și ordonare

Există o serie de probleme la care nu trebuie să ordonăm toate elementele unei mulțimi. Selectăm câteva elemente din mulțime și numai pe acestea le ordonăm. Am întâlnit o astfel de problemă la stabilirea medaliaților la un concurs sportiv. Din cei 8 atleți am selectat 3, iar pe aceștia i-am ordonat după culoarea medaliei obținute, aur, argint și bronz. Am ajuns la concluzia că avem $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ de cazuri posibile. Acest procedeu se numește ordonare (aranjare). În acest exemplu am calculat numărul aranjamentelor de 8 elemente luate câte 3, notat cu V_8^3.

Deci $V_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Notăm cu V_n^k numărul care arată în câte moduri putem alege dintre n elemente k elemente ($k \leq n$), în orice ordine posibilă.

V_n^k

Pe primul loc putem plasa oricare dintre cele n elemente, iar pe locul doi $n - 1$, pe locul trei $n - 2$. Continuând procedeul pe locul al k-lea putem plasa $n - (k - 1) = n - k + 1$ elemente. Astfel vom obține numărul aranjamentelor de n elemente luate câte k. În continuare formulăm teorema referitoare la cazul general.

Teoremă

Numărul aranjamentelor de *n* elemente luate câte *k* este egal cu

$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, unde n și k sunt numere întregi pozitive și $k \leq n$.

Aranjamente

Exemplul 1 Să se scrie toate cuvintele care conțin 3 litere alese din literele cuvântului HUBA, cu condiția ca aceste cuvinte să fie formate din litere diferite.

Soluție

Trebuie să aflăm numărul aranjamentelor de 4 elemente luate câte 3.

$V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. (Acest număr este egal cu P_4, deoarece la cuvintele formate din patru litere va dispare ultima literă.)

Când enumerăm toate aranjamentele, este avantajos să urmăm ordinea alfabetică a literelor, pentru a le găsi pe toate.

ABH,	ABU,	AHB,	AHU,	AUB,	AUH,
BAH,	BAU,	BHA,	BHU,	BUA,	BUH,
HAB,	HAU,	HBA,	HBU,	HUA,	HUB,
UAB,	UAH,	UBA,	UBH,	UHA,	UHB.

Exemplul 2 Participanții unui concurs pot câștiga premiile I. sau II. După părerea conducătorului de joc numărul total al cazurilor posibile pentru a câștiga cele două premii diferite, este egal cu 132. O persoană poate câștiga un singur premiu. Câte persoane au participat la concurs?

Soluție

Constatăm că este vorba despre aranjamente de n elemente luate câte 2.

În cazul nostru $V_n^2 = n \cdot (n-1) = 132$,

sau $n^2 - n - 132 = 0$. Căutăm rădăcina întreagă pozitivă.

Soluțiile ecuației sunt: $n_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+(-4)\cdot(-132)}}{2} = \dfrac{1 \pm 23}{2}$.

Soluția căutată este 12, deci la concurs au participat 12 persoane.

În cazul exemplului 1, cuvintele BAB, UHU, UBU, … nu se pot lua în considerare întrucât conțin litere care se repetă. Ca și la permutări, putem permite și aici ca elementele să se repete. **Acestea le vom numi aranjamente cu repetiții.**

Exemplul 3 Câte cuvinte de trei litere (nu neapărat cu sens) se pot forma din literele cuvântului HUBA, dacă literele se pot repeta?

Soluție

Pe primul loc avem 4 cazuri posibile, pe locurile 2 și 3 la fel, pentru că literele se pot repeta. Deci numărul total al cazurilor posibile este egal cu $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$.

Putem formula cele constatate anterior și în cazul general.

$V_n^k(i)$

Notăm cu $V_n^k(i)$ numărul care arată în câte moduri putem alege dintre n elemente k elemente ($k \leq n$), în orice ordine posibilă, dacă elementele se pot repeta.

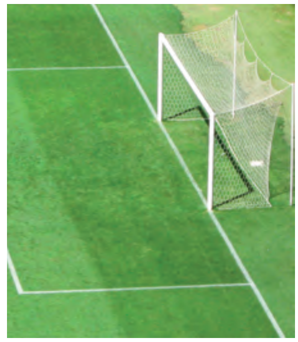
Pe primul loc putem plasa oricare dintre cele n elemente, deci avem n cazuri posibile. Deoarece elementele se pot repeta, pentru locul al doilea avem tot n cazuri posibile, la fel pentru locul al treilea și așa mai departe pentru locul al k-lea, în total $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (de k ori), adică n^k.

Aranjamente cu repetiții

Teoremă

Numărul aranjamentelor cu repetiții de n elemente luate câte k:
$V_n^k(i) = n^k$, unde n și k sunt numere întregi pozitive.

În cazul exemplului 3, numărul aranjamentelor cu repetiții de 4 elemente luate câte 3 este egal cu $V_4^3 = 4^3 = 64$.



Exemplul 4 Pentru completarea unui buletin de Totó, trebuie să dăm 13+1 pronosticuri. În cazul când câștigă echipa gazdă scriem 1, în caz de egalitate X, iar în cazul cînd câștigă echipa oaspete, scriem 2.

a) Câte buletine ar trebui să completăm ca să avem cu siguranță un buletin cu 14 rezultate exacte?

b) Dacă pentru completarea unui pronostic avem la dispoziție o secundă, de câte zile am avea nevoie pentru completarea acestor buletine, lucrând fără oprire?

Soluție

a) Avem la dispoziție trei elemente diferite: 1, 2 și X. Vom calcula numărul aranjamentelor cu repetiții de 3 elemente luate câte 14.

$V_3^{14}(i) = 3^{14} = 4\,782\,969$, deci pentru a obține cu siguranță 14 rezultate exacte trebuie să completăm 4 782 969 de buletine.

b) Pe un buletin completat apar 14 pronosticuri, deci pentru completarea tuturor buletinelor avem nevoie de 4 782 969 · 14 de secunde. Dacă împărțim numărul obținut cu 60 · 60 · 24, ajungem la numărul zilelor:

$$\frac{4\,782\,969 \cdot 14}{60 \cdot 60 \cdot 24} \approx 775.$$

Deci pentru completarea tuturor buletinelor ar trebui să lucrăm fără oprire cel puțin 775 de zile.

Exemplul 5 Câte numere naturale de cel mult 4 cifre se pot scrie în sistemul de numerație de baza 6?

Soluție

Cifrele unui număr natural scris în baza 6 pot fi următoarele: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Deoarece căutăm numere cu cel mult patru cifre, vom calcula aranjamentele cu repetiții de 6 elemente (diferite) luate câte 4.

$V_6^4(i) = 6^4 = 1296.$

Deci cel mult 1296 numere naturale de cel mult 4 cifre se pot scrie în baza 6.

Aceste numere vor fi: 0000, 0001, …, 0005, 0010, 0011, … , 5555.

Probleme

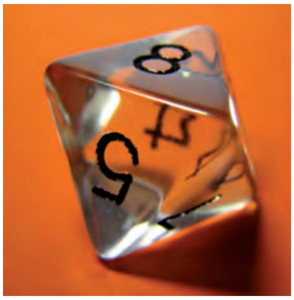
1. K1 Să se scrie toate cuvintele formate din trei litere diferite (chiar dacă nu au sens) folosind literele cuvântului ERDŐ (PĂDURE)

2. K1 Cu ajutorul cifrelor 1, 3, 5, 7 formăm numere de trei, respectiv de patru cifre. Într-un număr fiecare cifră poate figura cel mult o singură dată. Comparați numărul posibil al numerelor de trei cifre cu cel al numerelor cu patru cifre.

3. K1 La un concurs școlar de recitări 10 elevi s-au calificat în finală, dintre care primii șase vor fi premiați. În câte moduri se poate realiza( )premierea?

4. K2 La un concurs sportiv premierea cu medaliile de aur, argint și bronz s-a putut realiza în 504 de moduri posibile. Câți sportivi au participat la acest concurs?

Alte probleme: Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény II.: 64–77.



5. K2 La un concurs se acordă trei premii diferite la 9 participanți. În câte moduri pot fi premiați concurenții dacă un paricipant poate să câștige mai multe premii?

6. K2 La un concurs participanții trebuie să completeze un test, care conține 30 de întrebări, iar răspunsurile se pot alege din 5 răspunsuri diferite (fiecare întrebare are un singur răspuns corect). La un alt concurs figurează numai 4 răspunsuri. Cel mult câte întrebări poate să conțină acest din urmă concurs astfel ca numărul cazurilor posibile pentru completarea testului să fie mai mic ca la primul concurs?

7. K2 Un zar are forma unui octaedru ale cărui fețe sunt numerotate de la 1 la 8. Se aruncă zarul, iar rezultatele obținute se notează în ordinea aruncărilor. După a șasea aruncare apare un număr de șase cifre. Câte numere de șase cifre nu pot apărea în acest mod?

4. Determinarea numărului selecțiilor

La determinarea numărului selecțiilor se poate întâmpla să nu ne intereseze ordinea elementelor selectate. De exemplu alegem dintr-o clasă doi elevi care vor fi de servici săptămâna viitoare. Când dirigintele anunță numele acestora, n-are importanță ordinea lor.

Astfel de probleme apar destul de des în viața cotidiană.

Exemplul 1 La extragerile Loto 5 se extrag săptămânal 5 numere din 90, de la 1 la 90. Se pot pronostica 5 numere. Câte buletine trebuie completate ca să avem toate cele 5 numere câștigătoare?

Soluție

Dacă ne-ar interesa și ordinea numerelor extrase am avea aranjamente de 90 de elemente luate câte 5.

$V_{90}^{5} = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86.$

Acest rezultat va conține și P_5, adică numărul permutărilor de 5 elemente.

Dar în cazul nostru nu ne interesează ordinea numerelor.

Deci numărul total al cazurilor posibile va fi:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268.$$

În consecință trebuie să completăm 43 949 268 de buletine pentru a obține 5 numere câștigătoare.

Procedeul de mai sus îl numim **combinare**, iar la exemplul anterior am calculat numărul total al **combinărilor de 90 de elemente luate câte 5**. Acest număr îl vom nota cu $C_{90}^{5} = \binom{90}{5}$ (5 sub 90).

Am constatat anterior că

$$\binom{90}{5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}.$$

Observație
Pentru calculul acestui număr putem folosi și calculatorul de buzunar. În cazul nostru tastăm: 9, 0, Shift, *nCr*, 5, = și va apărea numărul 43 949 268.

În continuare vom formula mai general problema pusă la exemplul de mai sus.

În câte moduri putem selecta k obiecte dintre n obiecte diferite, dacă ordinea obiectelor nu contează?

Sau altfel: Câte submulțimi de k elemente are o mulțime de n elemente?

Notăm cu $C_n^k = \binom{n}{k}$ numărul care arată că în câte moduri se pot alege k elemente dintre n elemente ($k \leq n$).

C_n^k

Urmând raționamentul de la exemplul 1 vom formula teorema de mai jos.

Teoremă

Combinări

Numărul combinărilor de *n* elemente luate câte *k*:

$C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$, unde n și k sunt numere întregi pozitive și $k \leq n$.

Prin convenție folosim următoarele definiții: $C_n^0 = \binom{n}{0} = 1$, $C_0^0 = \binom{0}{0} = 1$.

Exemplul 2 Să se arate că $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Soluție

$$\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-k)! \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{k! \cdot (n-k)!} =$$

Simplificăm cu $(n-k)!$!

$$= \frac{(n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.$$

care este chiar formula din teoremă.

Exemplul 3 O clasă care are 29 de elevi primește ca recompensă 10 bilete de teatru.

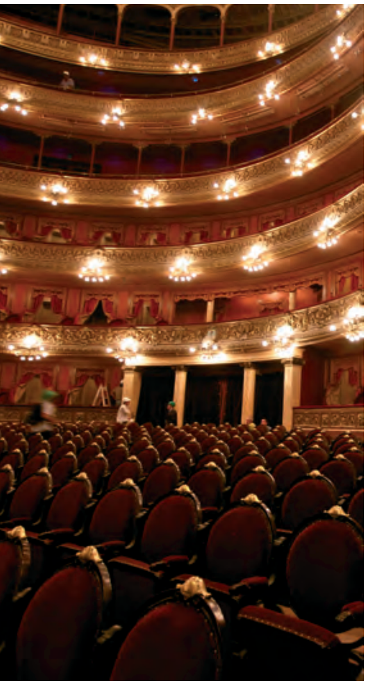
a) În câte moduri se pot selecta cei 10 elevi care vor participa la spectacol?

b) În câte moduri se pot selecta cei 19 elevi care nu vor participa la spectacol?

c) Dacă elevii se gândesc și la diriginte, în câte moduri se pot selecta 10 persoane care vor participa la spectacol?

d) În câte moduri se pot selecta 10 persoane dacă dirigintele figurează între ele cu siguranță?

e) Ce relație există între numerele cazurilor posibile găsite la punctele *a)*, *c)* și *d)*?



Soluție

a) Aici este vorba despre combinări de 29 de elemente luate câte 10.

$$C_{29}^{10} = \binom{29}{10} = \frac{29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10} = 20\,030\,010.$$

b) Acuma vom calcula numărul combinărilor de 29 elemente luate câte 19. Aceasta se poate calcula și fără folosirea formulei de calcul, întrucât dacă am selectat 10 elevi dintre 29 care se duc la teatru, în același timp am selectat și 19 elevi care nu se duc la teatru.

Deci $C_{29}^{19} = \binom{29}{19} = \binom{29}{10} = 20\,030\,010.$

c) În acest caz vom calcula numărul combinărilor de 30 de elemente luate câte 10.

$$C_{30}^{10} = \binom{30}{10} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \ldots \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10} = 30\,045\,015.$$

d) Deoarece dirigintele primește un bilet de teatru pentru cei 29 de elevi rămân 9 bilete, deci vom calcula numărul combinărilor de 29 elemente luate câte 9.

$$C_{29}^{9} = \binom{29}{9} = \frac{29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9} = 10\,015\,005.$$

e) Se observă imediat că 30 045 015 = 10 015 005 + 20 030 010, ceea ce nu ne surprinde. Dacă adunăm numărul total al cazurilor când dirigintele se duce la teatru cu siguranță și când nu se duce cu siguranță, obținem numărul combinărilor de 30 de elemente luate câte 10.

Pe baza exemplului anterior putem enunța două proprietăți importante, pe care le putem demonstra ori cu metoda folosită la exemplul 3, ori prin calcule algebrice.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Exemplul 4 Așezăm patru coșuri, unul lângă celălalt. În câte moduri putem așeza în aceste coșuri 10 mingi, care sunt la fel? *(figura 2)*

2.

Soluție

Coșurile se pot deosebi între ele, deoarece sunt așezate unul lângă celălat, în schimb mingile nu. Două așezări ale mingilor se deosebesc între ele, dacă măcar într-un coș schimbăm numărul mingilor.

Fiecare așezare notăm cu semnele | și ○. Dacă în primul coș nu se află o minge, notăm cu |, dacă este, atunci cu ○. Dacă sunt mai multe mingi, numărul semnelor ○ este egal cu numărul mingilor, după care urmează semnul |. În continuare apar atâtea semne ○, câte mingi se află în coșul al doilea. Dacă în acest coș nu se află nici o minge, urmează două semne ||. Continuând procedeul, fiecare așezare a mingilor va fi notată cu 10 semne de ○ și 4 semne de |.

De exemplu notația ○○○○|○○○||○○○ înseamnă că în primul coș se află 4 mingi, în al doilea 3, în a treilea nu se află nici una, iar în al patrulea 3 mingi.